Calendario Matemático 2020

Olimpiada Juvenil de Matemática

Presentación del Calendario Matemático 2020

Retomando una tradición de las Olimpiadas Matemáticas Venezolanas hemos preparado este *Calendario Matemático 2020*. Para cada día (exceptuados sábados, domingos y feriados) se propone un problema o se recuerda a algún matemático notable nacido ese día. Hemos procurado no limitarnos a los famosos de siglos anteriores sino que hemos incluido algunos matemáticos contemporáneos. El Calendario va dirigido especialmente a los estudiantes que participan en la Olimpiada Juvenil de Matemática (OJM), desde quinto grado de primaria hasta quinto año de enseñanza media, así como a sus maestros, profesores, padres y representantes, pero creemos que cualquier persona puede encontrar en él algo interesante.

Cada problema tiene una indicación del nivel al cual va dirigido: A si es para todos, B si es para media general y C si es para los alumnos de 4° y 5° años. El grado de dificultad varía bastante. Los problemas tipo A en general son sencillos y de carácter recreativo, como los problemas iniciales de una prueba Canguro. Los problemas tipo B son un poco más difíciles, como los problemas medios de la prueba Canguro. Entre los problemas tipo C hay algunos bastante difíciles, aunque también los hay fáciles. Algunos problemas son de carácter recreativo y otros son más formales y están relacionados con algún tópico matemático importante, pero siempre hemos procurado que resulten interesantes y se salgan de la rutina. Nuestra intención es que cualquier estudiante pueda encontrar algunos problemas adecuados a su nivel que logren entusiasmarlo.

Hemos aprovechado algunas casillas vacías del calendario para recordar algunos hechos matemáticos y definiciones importantes, especialmente aquellos que es necesario tener presentes para resolver los problemas propuestos en el mes.

En la sección *Soluciones y Comentarios*, a diferencia de ediciones anteriores, hemos incluido soluciones bastante desarrolladas para todos los problemas. También se incluyen notas biográficas sobre los matemáticos presentados en el calendario.

Este calendario puede ser usado de diversas maneras. La primera es colocar una copia de los problemas de cada mes en el salón de clases y tratar de resolver uno cada día, si es adecuado al nivel del curso. Pero también puede ser utilizado como material de entrenamiento para las pruebas Canguro, alternándolo con la resolución de pruebas de años anteriores.

Este calendario y otros anteriores se pueden encontrar en el nuevo sitio web de la Asociación de Competencias Matemáticas, `acmven.org`

José H. Nieto

Coordinador Académico de la OJM

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas www.acmven.org

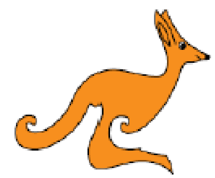
ENERO 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**		**1.** **Año Nuevo**	**2.** Evalúe A $1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5}}.$	**3.** Evalúe A $1-\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5-\cfrac{6}{7}}}.$
6. ¿Cuál es el dígito de las unidades de 2^{2020}? B	**7.** ¿Cuál es el último dígito decimal diferente de cero de 5^{-2020}? B	**8.** Ana tiene gallinas y ovejas. Si contó 32 cabezas y 102 patas, ¿cuántas ovejas tiene? A	**9.** Para numerar las páginas de un libro se usaron 867 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro? A	**10.** Con $\frac{5}{8}$ de litro de agua se llena $\frac{7}{8}$ de una botella. ¿Cuál es la capacidad de la botella? A
13. Seis niños nacieron el mismo día pero en seis años consecutivos. Si la suma de las edades de los tres mayores es 27 años, ¿cuál es la edad del menor? A	**14.** Resuelva $ABCDE = EBB^2$, donde cada una de las letras A, B, C, D y E representa un dígito diferente. B	**15.**  n. S. Kovalevskaya	**16.** Cada mochuelo en su olivo y sobra un mochuelo. Dos mochuelos en cada olivo y sobra un olivo. ¿Cuántos mochuelos y cuántos olivos son? A	**17.** Han transcurrido cinco octavos de un día. ¿Qué hora es? A
20. Un cartón de huevos contiene 30 huevos. Cuántas docenas de huevos hay en 10 cartones de huevos? A	**21.** Escriba una expresión numérica con tres cuatros cuyo resultado sea 20. A	**22.** ¿Cuál es el mayor número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ con $a<b<c<d$ que es divisible entre 6? A	**23.**  n. D. Hilbert	**24.** Ordene de menor a mayor los números 3, $\sqrt{10}$ y $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. B
27. ¿Qué número es mayor, $2\sqrt{2}$ o $2^{\sqrt{2}}$? B	**28.** Halle un número de cuatro dígitos de la forma $\overline{aabb}$ que sea cuadrado perfecto. B	**29.** ¿Cuál es la suma de todos los coeficientes del polinomio $(3x^2+5x-7)^{2020}$? B	**30.** ¿Cuál es el mayor valor que puede tener la suma de los dígitos del producto de los dígitos de un número del 1 al 100? A	**31.** Dadas cuatro rectas en el plano, ¿cuántos puntos de intersección entre ellas puede haber? A

FEBRERO 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	. Recuerda: El *factorial* de un número natural n es el producto de los números desde 1 hasta n y se denota $n!$. Ejemplo: $4! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 = 24$.	. Recuerda: Por convención $0! = 1! = 1.$	. Recuerda: El número de permutaciones (ordenaciones) de n objetos es $n!$.	. Recuerda: El número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$
3. B Juan obtuvo 18 o 20 puntos en cada uno de 5 exámenes de matemática. Si su promedio fue 19,2 puntos, ¿cuántos 20 obtuvo?	**4.** A Cada hoja de un libro mide 20 cm $\times$ 15 cm. Si se extienden todas juntas ocupan un área de 3 m^2. ¿Cuántas páginas tiene el libro?	**5.** A Halle un entero de 6 dígitos que comience con 1 y tal que, si el 1 se mueve al otro extremo del número, éste se triplica.	**6.** A Ana, Berta y Cleo tienen un hermano cada una. Cada chica sale con el hermano de alguna de las otras dos. Un día Ana se encuentra con el hermano de Berta y su pareja. ¿Con quién sale Berta?	**7.**  n. G. H. Hardy
10. A ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 niños en una fila?	**11.** A ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 niñas en una ronda?	**12.** A ¿De cuántas maneras se puede armar una pulsera con 5 cuentas esféricas idénticas pero de diferentes colores?	**13.** A ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra FRUTA de modo que la primera y la última sean vocales?	**14.** B ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden obtener permutando las letras de ARAÑA?
17. B ¿De cuántas maneras se puede seleccionar una comisión de 3 miembros de un conjunto de 7 personas?	**18.** B ¿Cuántos triángulos se pueden formar seleccionando 3 vértices de un octógono regular?	**19.** B ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?	**20.** B La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 6 cm y el perímetro es 14 cm. ¿Cuál es el área del triángulo?	**21.** A Un artículo se vende con el 15 % de descuento en Bs 35700. ¿Cuál era el precio original?
24. **Carnaval**	**25.** **Carnaval**	**26.** A ¿Para cuántos números de tres dígitos el producto de sus dígitos es 343?	**27.** A ¿Para cuántos números de cuatro dígitos el producto de sus dígitos es 343?	**28.** B ¿Para cuántos números de ocho dígitos el producto de sus dígitos es 343?

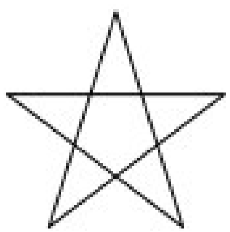
Marzo 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2. A ¿Cuál es el primer entero mayor que 2020 cuyos dígitos suman 16?	**3.** A ¿Cuál es la suma de los números de dos dígitos múltiplos de 6 cuyos dígitos suman 6?	**4.** A ¿Qué número es mayor, $\frac{2019}{2020}$ o $\frac{2020}{2021}$?	**5.** A ¿Cuál es el menor número mayor que 1000 que tiene todos sus dígitos diferentes?	**6.** B ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $$\frac{2021^2-1}{2020}$$
9. A ¿Cuántos números primos de dos cifras tienen la propiedad de que, al multiplicar sus cifras, se obtiene nuevamente un número primo?	**10.** A Ana nació el 1 de enero del 2020. Su hermano Bruno es mayor que Ana en un año y un día ¿Cuál es la fecha de nacimiento de Bruno?	**11.** A ¿Cuántos números de tres dígitos son tales que la suma de los dos primeros dígitos es igual al tercer dígito?	**12.** A ¿Cuántos números primos de dos cifras son tales que al invertir el orden de sus cifras se obtiene, nuevamente, un número primo?	**13.** A ¿Cuántos números de cuatro dígitos hay, tales que la suma de los dígitos sea 4 y su producto sea 0?
16. A ¿Cuántos cuadrados de 2 cm de lado caben en un cuadrado de 8 cm de lado, sin que se superpongan?	**17.** A Andrés tiene 147 canicas y Luis tiene 57. ¿Cuántas canicas debe darle Andrés a Luis para que Luis tenga exactamente la mitad de canicas que Andrés?	**18.** A Un cubo de arista 3 cm se pinta de azul. Luego se corta en cubitos de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos tienen exactamente dos caras pintadas de azul?	**19.**  Canguro Matemático	**20.** A ¿Cuál es la diferencia entre la suma de los primeros 1000 números naturales pares y la suma de los primeros 1000 números naturales impares?
23.  n. E. Noether (1882–1935)	**24.** A Con 100 cubitos de madera de 1 cm de arista se construyen dos cubos más grandes, utilizando el mayor número posible de cubitos. ¿Cuántos cubitos quedan sin utilizar?	**25.** A ¿Cuál es el mayor número de regiones en que se puede dividir un círculo al trazar cuatro cuerdas del mismo?	**26.** A Un listón de 15 m se divide en el mayor número posible de trozos diferentes cuyas longitudes sean números enteros de metros. ¿Cuántos cortes se realizaron al listón?	**27.** A Seis hermanos nacen con intervalos de dos años entre cada uno y el siguiente. La edad del hermano mayor es el doble de la del menor. ¿Qué edad tiene el hermano menor?
30. B ¿Qué número es mayor: el 37 % de 73 o el 73 % de 37?	**31.** B ¡Qué letra ocupa la posición 2020 en la secuencia C A N G U R O C A N G U R O C A N G U R O. . . ?			. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

Abril 2020

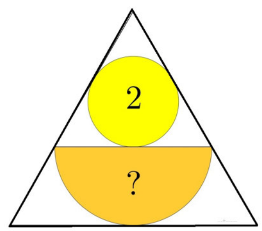
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. Recuerda: **El 1 no es primo.**	. Recuerda: **El 0 es un entero par.**	**1.** B ¿Cuál es la suma de los números naturales del 1 al 100?	**2.** A ¿Cuál es el menor entero positivo cuyos dígitos suman 20?	**3.** A Si el perímetro de un cuadrado es 24 cm, ¿cuál es su área?
6. B ¿Qué número es mayor, $\sqrt{2020}$ o $1+\sqrt{1937}$?	**7.** A ¿Cuál es el menor número de cinco dígitos que tiene todos sus dígitos diferentes?	**8.** B ¿Cuál es el menor número primo de tres dígitos?	**9.** **Jueves Santo**	**10.** **Viernes Santo**
13. A ¿Cuál es el menor cuadrado perfecto mayor que 9 que es capicúa (es decir, que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda)?	**14.** B ¿Hay algún número primo capicúa de 4 dígitos?	**15.**  n. L. Euler (1707–1783)	**16.** A ¿Cuántos triángulos equiláteros de 2 cm de lado caben en un triángulo equilátero de 10 cm de lado, sin que se superpongan?	**17.** B Una hoja de papel cuadrada de 20 cm de lado se divide en dos partes mediante un corte rectilíneo. Una de las partes es un rectángulo de perímetro 56 cm. ¿Cuál es el perímetro de la otra parte?
20. B ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $$\frac{2020^3-1}{2020^2+2021}$$	**21.** A Un cubo de arista 5 cm se pinta de azul. Luego se corta en cubitos de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos tienen exactamente una cara pintada de azul?	**22.** A De todos los números de tres dígitos cuya suma de dígitos es 8 se toman el mayor y el menor. ¿Cuál es su suma?	**23.** B ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $$2^{2020}-4^{1010}+16^{505}-1024^{202}$$	**24.** A ¿Qué obtienes si divides la mitad de la mitad de un tercio entre la tercera parte de un cuarto?
27. A Ana coloreó las casillas atravesadas por las dos diagonales de un tablero cuadrado. Si en total coloreó 9 casillas, ¿Cuántas casillas en total tiene el tablero?	**28.** B ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $$\frac{1}{1011}+\frac{2020^2}{2021^2-1}$$	**29.** C Dos de los lados de un triángulo rectángulo miden 12 cm y 13 cm. Si el tercer lado mide un número entero de centímetros, ¿cuánto mide?	**30.**  n. K. F. Gauss (1777–1855)	. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

MAYO 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	. Recuerda: **El 0 es múltiplo de cualquier otro entero.**	. Recuerda: **El único múltiplo del 0 es el 0.**	. Recuerda: **Todos los números enteros son múltiplo de1 1.**	**1.** **Día del trabajador**
4. A Dado un cubo, ¿cuántos planos pasan por cuatro de sus vértices?	**5.** A Dado un cubo, ¿cuántos planos pasan por exactamente tres de sus vértices?	**6.** B Halle todos los primos p y q tales que $p = 7q + 3$.	**7.** A ¿Cuál es el menor entero positivo cuyos dígitos suman 50?	**8.** B Calcule el valor de la suma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{99}$
11. A  ¿Cuántos triángulos hay en la figura?	**12.**  n. Maryam Mirzajani (1977–2017)	**13.** A Si se lanzan tres dados y se suman los puntos obtenidos, ¿cuántos valores diferentes se pueden obtener?	**14.** A María lanzó un dado 3 veces. Si en cada lanzamiento obtuvo un número diferente, y en total obtuvo 15 puntos, ¿cuáles son los tres números que obtuvo?	**15.** B Juan es 7 años mayor que Ana y dentro de un año, la edad de Juan será el doble que la de Ana. ¿Cuál es la edad de Juan?
18. B La edad de Bruno es el doble de la de Ana. Cuando Ana tenga la edad de Bruno, las edades de ambos sumarán 35 años. ¿Qué edad tiene cada uno?	**19.** B Si Berta agrupa sus caramelos de 3 en 3 obtiene 5 grupos más que cuando los agrupa de 4 en 4. ¿Cuántos caramelos tiene Berta?	**20.** A ¿Cuántos números de tres dígitos tienen los tres dígitos diferentes?	**21.** A ¿Cuántos números de tres dígitos tienen el primero impar, el segundo par y el tercero diferente de los dos primeros?	**22.** B Calcule $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}$.
25. B Calcule $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{97\cdot 99}$.	**26.** B ¿Cuál es el último dígito de 3^{2020}?	**27.** A Las páginas de un libro están numeradas del 1 al 200. ¿Cuántas veces aparece el dígito 7?	**28.** C ¿Cuál es el valor exacto de $\log_2 \sqrt[3]{32}$?	**29.** C ¿Cuál es el valor exacto de $\log_2 0,0625$?

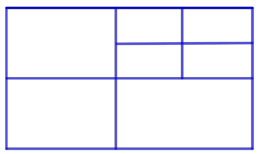
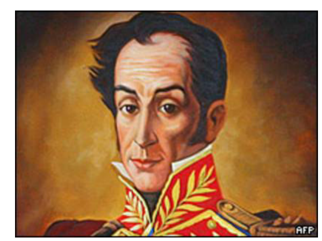
Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas www.acmven.org

JUNIO 2020

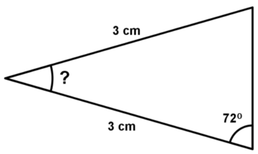
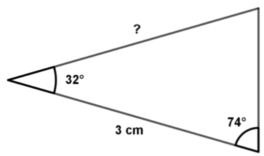
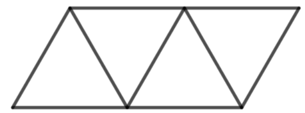
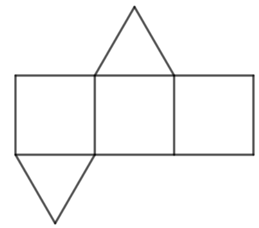
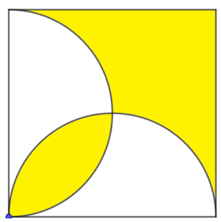
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1. A ¿Cuál es el máximo común divisor (mcd) de 120 y 252?	**2.** B ¿Cuál es el mcd de 1234567891 y 1234567893?	**3.** B ¿Cuál es el mcd de 600000039 y 300000015?	**4.** A Los dígitos de un número entero son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en algún orden. ¿Es ese número divisible entre 3? ¡Y entre 9?	**5.** B Los dígitos de un número entero son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, en algún orden. ¿Puede ese número ser un cuadrado perfecto?
8. B ¿Qué número es mayor, 2^{300} o 3^{200}?	**9.** B ¿Qué número es mayor, 31^{11} o 17^{14}?	**10.** B ¿Qué número es mayor, 4^{52} o 5^{44}?	**11.** B Si $2^x = 5$ y $5^y = 16$, ¿cuál es el valor del producto xy?	**12.** B Si $8^x = 25$ y $125^y = 64$, ¿cuál es el valor del producto xy?
15. B Los dígitos de un número entero son, en algún orden, 2, 2, 3, 3, 3, 7 y 8. ¿Puede ese número ser un cuadrado perfecto?	**16.** B Una recta corta a todos los lados de un polígono de 11 lados. Pruebe que necesariamente pasa por al menos uno de los vértices.	**17.** C 	**18.** A Un cubo de arista 5 cm se pinta de verde. Luego se corta en cubitos de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos tienen exactamente dos caras pintadas de verde?	**19.**  n. Blaise Pascal
22. A Una colonia de bacterias se coloca en un vaso y cada minuto duplica su tamaño. Si a las 9 am el vaso estaba lleno, ¿a qué hora el vaso estaba hasta la mitad?	**23.** A ¿De cuántas maneras diferentes se pueden elegir presidente, vicepresidente y secretario en un club de 11 miembros?	**24.** Batalla de Carabobo 	**25.** A ¿Cuántas banderas diferentes se pueden construir con tres franjas horizontales del mismo ancho, si se dispone de tela de 5 colores distintos y las franjas adyacentes no pueden ser del mismo color?	**26.** B ¿Cuántos números de tres dígitos son divisibles entre 9, tienen el primer dígito impar y el segundo par?
29. B ¿Qué resto se obtiene si 3^{2020} se divide entre 7?	**30.** A Al sumar las longitudes de tres lados de un rectángulo se obtienen 20 cm o 22 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?	. **Recuerda:** $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $(a^n)^k = a^{nk}$	. **Recuerda:** $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b x$ $\log_b c \cdot \log_c x = \log_b x$	. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas www.acmven.org

JULIO 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. Niveles: A: para todos, B: media general, C: 4° y 5° años.		**1.** A Si un corazón late en promedio 70 veces por minuto, ¿cuántas veces late en una semana?	**2.** A La Tierra da una vuelta completa alrededor de su eje en 24 horas. ¿Cuánto tarda en girar un grado?	**3.** A ¿Cuántos divisores enteros positivos tiene 1000?
6. B ¿Cuántos triángulos diferentes hay con lados enteros (en cm) y perímetro 7?	**7.** B Un triángulo escaleno tiene lados enteros (en cm) y perímetro 12. ¿Cuánto miden sus lados?	**8.** B ¿Verdadero o falso? $\sqrt{(-3)^2} = -3$	**9.** B Calcule el valor exacto de $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$	**10.** B ¿Qué número es mayor, $\sqrt{5}-2$ o $2-\sqrt{3}$?
13. A Ana dice que Bea miente. Bea dice que Cleo miente. Cleo dice que Dora miente. Dora dice que Cleo miente. ¿Cuántas de ellas mienten?	**14.** A  ¿Cuántos rectángulos ves?	**15.** B Ana y Bea comienzan a correr juntas alrededor de una pista circular a las 8 am. Ana tarda 6 minutos en dar una vuelta y Bea tarda 7. ¿A qué hora se vuelven a encontrar?	**16.** A Se tienen tres tarjetas marcadas con 9, que volteadas se leen como 6. ¿Cuántos enteros distintos de tres dígitos se pueden formar con ellas?	**17.**  n. Terence Tao
20. B En un triámgulo ABC, se tiene $BC = 6$ cm y $CA = 9$ cm. Si la altura desde el vértice A hasta el lado BC mide 3 cm, ¿cuánto mide la altura desde el vértice B hasta el lado AC?	**21.** A En una caja hay 6 calcetines blancos, 4 azules y 5 negros. Juan extrae calcetines de la caja sin mirar el color. ¿Cuántos debe extraer, como mínimo, para estar seguro de haber extraído un par del mismo color?	**22.** A En una caja hay 6 pelotas blancas, 4 azules y 5 rojas. Juan extrae pelotas de la caja sin mirar el color. ¿Cuántas debe extraer, como mínimo, para estar seguro de haber extraído al menos una de cada color?	**23.** A En una caja hay 4 pares de zapatos marrones y 3 pares de zapatos negros. Si se van sacando uno a uno y sin mirar, ¿cuántos hay que extraer, como mínimo, para estar seguro de haber sacado un par del mismo color, uno para cada pie?	**24.**  n. Simón Bolívar
27. A ¿Cuál es el menor entero positivo de 4 dígitos divisible entre 6 y entre 15?	**28.** B ¿Cuál es el menor entero positivo de 5 dígitos divisible entre 6, 15 y 35?	**29.** B ¿Qué número es mayor, $\sqrt{17}$ o $\frac{103}{25}$?	**30.** A Uno de los ángulos de un triángulo isósceles mide 100°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?	**31.** B Uno de los ángulos de un triángulo es igual al promedio de los otros dos. ¿Cuál es la medida de ese ángulo?

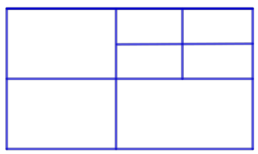
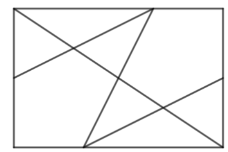
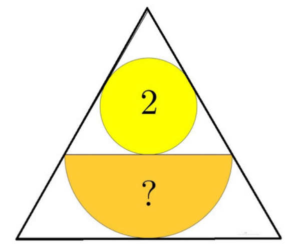
AGOSTO 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3. A Las edades de Juan y Ana suman 70 años. Si Juan es 24 años mayor que Ana, ¿cuál es la edad de Juan?	**4.** A Si el perímetro de un cuadrado es 36 cm, ¿cuál es su área?	**5.** B Si el área de un rectángulo es 9 cm^2, ¿cuál es el mínimo valor que puede tener su perímetro?	**6.** B Si el perímetro de un rectángulo es 8 cm, ¿cuál es el máximo valor que puede tener su área?	**7.** A Halle el mayor entero de 9 dígitos diferentes tal que la suma de cada par de dígitos vecinos sea primo.
10. A  Halle la medida del ángulo marcado con '?'.	**11.** A  Halle la medida del lado marcado con '?'.	**12.** B  ¿Qué poliedro se puede armar con esto?	**13.** B  ¿Qué poliedro se puede armar con esto?	**14.** A Un triángulo equilátero y un cuadrado tienen un lado común. Si el perímetro del triángulo es 12 cm, ¿cuál es el área del cuadrado?
17.  n. Pierre de Fermat	**18.** A  ¿Qué fracción del cuadrado es amarilla?	**19.** B Un grifo llena un tanque de agua en 2 horas. Otro grifo lo llena en 3 horas. ¿En cuánto tiempo se llena el tanque con los dos grifos abiertos?	**20.** B En la clase de Juan está el 25 % de los alumnos de primer año y el 10 % del total de alumnos del colegio. ¿Qué porcentaje de los alumnos del colegio están en primer año?	**21.**  n. Augustin-Louis Cauchy
24. B Calcule el valor exacto de $256^{\frac{3}{8}}$	**25.** B Calcule el valor exacto de $\left(\frac{1}{3125}\right)^{-\frac{2}{5}}$	**26.** B Calcule el valor exacto de $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{49}{81}}$	**27.** B ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un pentágono regular?	**28.** B ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un 9-gono regular?
31. C ¿Para qué valores de k las soluciones de $x^2 - 20x + k = 0$ son números primos?	. Recuerda: **Un número natural es primo si es mayor que 1 y sólo es divisible entre sí mismo y entre 1.**	. Recuerda: **El 1 no es primo.**	. Recuerda: **El único número primo par es el 2.**	. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

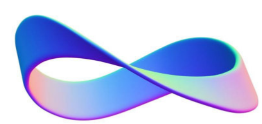
Septiembre 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	**1.** Evalúe A $1-2(3-4(5-6(7-8)))$.	**2.** Evalúe B $9(8-7(6-5(4-3(2-1))))$.	**3.** Seis personas se encontraron y cada par de ellas se dio la mano. ¿Cuántos apretones de mano se dieron? A	**4.** ¿Cuántos triángulos pueden formarse uniendo 3 vértices de un pentágono regular? A
7. Simplifique B $(x-1)(x^2+x+1)$.	**8.**  n. Marin Mersenne	**9.** El número $2^{303}-1$, ¿es primo o compuesto? B	**10.** Prueba que si n es entero positivo entonces x^n-1 es divisible entre $x-1$. B	**11.** Si n es un entero positivo y 2^n-1 es primo, pruebe que n es primo. B
14. ¿De cuántas maneras puede cubrirse un tablero de 2×2 con 2 dominós de 2×1? A	**15.** ¿De cuántas maneras puede cubrirse un tablero de 2×3 con 3 dominós de 2×1? A	**16.** ¿De cuántas maneras puede cubrirse un tablero de 2×4 con 4 dominós de 2×1? A	**17.**  n. Bernhard Riemann	**18.** ¿De cuántas maneras puede cubrirse un tablero de 3×4 con 6 dominós de 2×1? B
21. ¿De cuántas maneras puede cubrirse un tablero de 2×10 con 10 dominós de 2×1? B	**22.** ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden escribir usando una vez cada uno de los dígitos 0, 1, 2 y 3? A	**23.** ¿Cuál es el menor número impar que se puede obtener borrando cuatro de los ocho digitos de 51379052? A	**24.** Evalúe C $\log_{27} 81$.	**25.** Evalúe C $\log_2 5\cdot\log_5 64$.
28. Evalúe C $\log_2 3\cdot\log_{27} 32$.	**29.** ¿Cuántos triángulos pueden formarse uniendo 3 vértices de un hexágono regular? B	**30.** Evalúe B $\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\sqrt{1+2017\sqrt{1+2018\cdot 2020}}}}$.		

Octubre 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	. Recuerda: **Resolver** una ecuación $A(x) = B(x)$ significa hallar todos los valores de x para los cuales la igualdad se verifica.		**1.** A El apartamento de Bea está doce pisos por encima del de Ana. Un día Ana subía por las escaleras para visitar a Bea y en la mitad de su camino se encontraba en el octavo piso. ¿En cuál piso vive Bea?	**2.** A Se dibujan 4 circunferencias en la pizarra de modo que cada par de ellas tengan exactamente un punto en común. ¿Cuál es el mayor número de puntos que pueden estar en más de una circunferencia?
5.  n. Cédric Villani	**6.** A  ¿Cuántos rectángulos ves?	**7.** A En 3 partidos la "vino tinto" anotó 3 goles y le hicieron un gol. De esos tres partidos ganaron uno, empataron uno y perdieron uno. ¿Cuál fue el resultado del partido ganado?	**8.** A  ¿Cuántos triángulos ves?	**9.** C 
12. **Día de la Resistencia Indígena**	**13.** A ¿Cuántos dígitos se necesitan para escribir todos los números del 1 al 100?	**14.** A Si se escriben todos los números del 1 al 100, ¿cuántos dígitos 7 hay que escribir?	**15.** B Si se escriben todos los números del 1 al 10000, ¿cuántos dígitos 7 hay que escribir?	**16.** A Halla todos los números de cuatro dígitos cuyos dígitos sumen 35.
19. B Resuelva la ecuación $2x + 9 = 5x + 3.$	**20.** B Resuelva la ecuación $(x-2)^2(x-5)^3 = 0.$	**21.** B Resuelva la ecuación $\frac{1}{2x-3} = \frac{1-x}{x^2-4x+3}.$	**22.** B Resuelva la ecuación $2^{x+3} = 128.$	**23.** B Resuelva la ecuación $2^{2x-5} = \frac{1}{8}.$
26. C Resuelva la ecuación $\log_2(3x-1) = 3.$	**27.** C Resuelva la ecuación $x + \frac{6}{x} = 5.$	**28.** C Resuelva la ecuación $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2.$	**29.** C Resuelva la ecuación $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0.$	**30.** C Resuelva la ecuación $\log_2(5 \cdot 2^{x-1} - 1) = 2x.$

NOVIEMBRE 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2. A Una mosca tiene 6 patas, mientras que una araña tiene 8 patas. Juntas, 2 moscas y 3 arañas tienen tantas patas como 10 pájaros y... ¿cuántos gatos?	**3.** A ¿Cuál es el menor número que se puede obtener borrando cuatro de los ocho dígitos de 51379052?	**4.** A ¿Cuál es el menor número **impar** que se puede obtener borrando cuatro de los ocho dígitos de 51379052?	**5.** A Una clase de 40 minutos comienza a las 11:50 am. Exactamente a la mitad de la clase, un pájaro entró en el salón. ¿A qué hora entró el pájaro al salón?	**6.** A Un reloj digital muestra las 20:51. ¿Dentro de cuánto tiempo volverá a mostrar los mismos dígitos, pero en otro orden?
9. A Los números de 4 dígitos cuyos dígitos suman 4 se ordenan de menor a mayor. ¿Qué puesto ocupa el 2020?	**10.** B Dos números de 4 dígitos tienen los mismos dígitos. ¿Cuál es la máxima diferencia posible entre ellos?	**11.** B ¿Cuánto es la suma de los dígitos de $10^{101} - 101$?	**12.** A En un mes hubo 5 domingos, 5 lunes y 5 martes. ¿Qué día de la semana fue el 19 de ese mes?	**13.** A En un mes hubo 5 sábados y 5 domingos, pero sólo 4 viernes y 4 lunes. ¿Cuántos miércoles habrá en el mes siguiente?
16. A Eva quería multiplicar un número por 301, pero se le olvidó el cero y lo multiplicó por 31, obteniendo como resultado 372. De no haberse equivocado, ¿qué resultado habría obtenido?	**17.** B  n. August Möbius	**18.** A Nos dan tres puntos que forman un triángulo. Queremos añadir un cuarto punto para formar un paralelogramo. ¿Cuántas posibilidades hay para el cuarto punto?	**19.** A Francisco seleccionó un número, lo dividió entre 7, al resultado le sumó 7 y a la suma la multiplicó por 7. Si obtuvo el número 777, ¿qué número seleccionó inicialmente?	**20.** B Un ferry puede transportar 10 carros pequeños o 6 camionetas en un viaje. Un día cruzó el río 5 veces, siempre lleno, y transportó 42 vehículos. ¿Cuántas camionetas transportó?
23. B ¿Qué número ocupa la posición 2020 en la sucesión $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$?	**24.** A ¿Qué dígito hay que agregar a la derecha de 25762 para obtener un múltiplo de 12?	**25.** A ¿Cuál será el próximo año en que el 25 de noviembre sea miércoles?	**26.** A Juan piensa 3 números. Si los suma de a pares obtiene 13, 15 y 18. ¿Cuáles son los números?	**27.** B Si $2^{9^x} = 8^{3^y}$, ¿qué relación existe entre x e y?
30. C Evalúe $\dfrac{\log_2 81}{\log_2 3}$.			.  **Cinta de Möbius**	. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

Diciembre 2020

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	**1.** A Juan pesa 12 kg más que la mitad de su peso. ¿Cuánto pesa Juan?	**2.** B ¿Cuántos pares de enteros positivos coprimos (a, b) existen tales que $ab = 90$?	**3.** A ¿Cuántos divisores tiene 2020?	**4.** A ¿Cuántos divisores de 1440 son múltiplos de 15?
7. C Halle expresiones exactas para los senos, cosenos y tangentes de $30°$, $60°$ y $45°$.	**8.** C Halle expresiones exactas para los senos, cosenos y tangentes de $15°$ y $75°$.	**9.** B Si $ABCDE$ es un pentágono regular y F es la intersección de AC y BE muestre que $CDEF$ es un paralelogramo.	**10.** C ¿Cuánto mide cada diagonal de un pentágono regular de lado 1 cm?	**11.** C Muestre cómo construir un pentágono regular con regla y compás.
14. C Halle una expresión exacta para $\cos 36°$.	**15.** C Halle una expresión exacta para $\operatorname{sen} 36°$.	**16.** B Halle todos los enteros x positivos y menores que 100 tales que $x^2 - 81$ sea múltiplo de 100.	**17.** B Si 2 l de solución salina al 20 % se mezclan con 3 l de solución al 30 %, ¿cuál es la concentración resultante?	**18.** B ¿Cuál es la suma de los dígitos del número $2^{2020} \cdot 5^{2025}$?
21. A Una caja con 30 bombones iguales pesa 330 g. Si quitamos 8 bombones pesa 274 g. ¿Cuánto pesa la caja vacía?	**22.**  n. S. Ramanujan	**23.** A Muestre que 1729 se puede escribir como suma de dos cubos de dos maneras diferentes.	**24.**  **Nochebuena**	**25.**  **Navidad**
28. C Si x, y son números positivos tales que $x^2 + y^2 + x + y = 12 - 2xy,$ ¿cuál es el valor de $x + y$?	**29.** A Un periódico de 60 páginas se arma con 15 hojas, que se colocan una sobre otra y luego se doblan a la mitad. Si a un periódico le falta la página 7, ¿cuáles otras le faltarán necesariamente?	**30.** A Halle el menor entero positivo n tal que la suma de sus divisores sea igual a la suma de los divisores de $n + 1$.	**31.**  **Fin de Año**	

Soluciones y comentarios

Enero

2. $1+\frac{2}{3+\frac{4}{5}}=1+\frac{2}{\frac{19}{5}}=1+\frac{10}{19}=\frac{29}{19}$.

3. $1-\frac{2}{3+\frac{4}{5-\frac{6}{7}}}=1-\frac{2}{3+\frac{4}{\frac{29}{7}}}=1-\frac{2}{3+\frac{28}{29}}=1-\frac{2}{\frac{115}{29}}=1-\frac{58}{115}=\frac{57}{115}$.

6. Los dígitos de las unidades de las potencias de 2 forman una sucesión periódica; 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6,... Como 2020 es múltiplo de 4, 2^{2020} termina en 6.

7. Como $5^{-2020}\cdot 102020 = 2^{2020}$ que termina en 6 (por el problema de ayer), la respuesta es 6.

8. Si x es el número de ovejas entonces hay $32-x$ gallinas y $4x+2(32-x)=102$, de donde $2x=38$ y $x=19$.

9. Tiene 325 páginas. De la página 1 a la 9 se usan 9 dígitos. De la 10 a la 99 se usan $90\times 2=180$. De la 100 a la 199 se usan $100\times 3=300$. Y otros 300 de la 200 a la 299. Como $9+180+300+300=789$ nos quedan $867-789=78$ dígitos, con los cuales se pueden numerar 26 páginas, de la 300 a la 325.

10. $\frac{5}{7}$ de litro.

13. Las edades de los tres mayores son 8, 9 y 10 años, luego la edad del menor es 5 años.

14. E sólo puede ser 1, 2 o 3. Pero como es el último dígito de B^2, la única posibilidad es $B=9$ y $E=1$. Como $199^2=39601$ se tiene $A=3$, $C=6$ y $D=0$.

15. Sofía (o Sonia) Vasílievna Kovalévskaya nacìo en Moscú, Rusia, el 15 de enero de 1850. En 1869 se inscribió en la Universidad de Heidelberg, donde los profesores le aconsejaron marchar a Berlín a recibir clases de Karl Weierstrass. Asì lo hizo, pero de forma privada, ya que la universidad no permitía la formación de mujeres. Sofía consiguió corregir y mejorar un resultado de Cauchy, enunciando y demostrando lo que hoy se llama el Teorema de Cauchy-Kowalevski. Por ese trabajo y otros dos obtuvo el doctorado summa cum laude en la Universidad de Gotinga en 1874, siendo la primera mujer en obtener ese título en el mundo. Gracias a Mittag-Leffler, Sofía pudo trabajar a prueba durante un año en la Universidad de Estocolmo en 1884. Aunque empezó dando clases en alemán, a los seis meses ya había aprendido el sueco. Durante este tiempo, Sofía escribió el más importante de sus trabajos, que aportaba una nueva solución a uno de los problemas que más habían atribulado a matemáticos famosos: la rotación de un cuerpo sólido en torno a un punto fijo. Por su trabajo innovador y original sobre este tema obtuvo el premio Bordin de la Academia de Ciencias de París (1888), y el de la Academia de Ciencias de Estocolmo al año siguiente. Además le dieron un puesto permanente de profesora en la Universidad de Estocolmo, convirtiéndose así en una de las primeras mujeres profesoras de universidad en Europa. Tambièn participó activamente en la redacción de la revista Acta Mathematica, fundada por Mittag-Leffler. Falleció de neumonía a la temprana edad de cuarenta y un años, el diez de febrero de 1891.

16. Cuatro mochuelos y tres olivos.

17. $\frac{5}{8}\cdot 24=15$, son las 15 en formato de 24 horas, o sea las 3 pm.

20. $30\times 10/12=25$.

21. $4\times 4+4=20$.

22. 4578. El 9 no puede ir, pues debería ser el último y el número sería impar. Entonces si comienza con 5 debe ser 5678, que no es múltiplo de 3. Comenzando con 4 los candidatos son 4568, que no es múltiplo de 3, y 4578 que es la respuesta.

23. David Hilbert nació el 23 de enero de 1862 en Königsberg, Prusia Oriental, y murió el 14 de febrero de 1943 en Gotinga, Alemania. Fue uno de los matemático más influyentes del siglo XIX y principios del XX. Trabajó en numerosas áreas: la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría, la noción de *espacio de Hilbert*, uno de los fundamentos del análisis funcional. Hilbert y sus estudiantes desarrollaron partes significativas de la infraestructura matemática necesaria para la mecánica cuántica y la relatividad general. Además trabajó la teoría de la demostración, la lógica matemática y la distinción entre matemática y metamatemática. Adoptó y defendió vivamente la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Cantor. En el segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en 1900 en París propuso 23 problemas abiertos que consideraba importantes, los cuales tuvieron enorme influencia sobre el desarrollo de la matemàtica desde entonces hasta nuestros dìas.

24. $3<\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$.

27. Como $2\sqrt{2}<3$ (porque $8<9$), se tiene $2^{\sqrt{2}}=((\sqrt{2})^2)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{2\sqrt{2}}<\sqrt{2}^3=2\sqrt{2}$.

28. $7744=88^2$. Como $\overline{aabb}=11\cdot\overline{a0b}$ el número debe ser múltiplo de 11, y si es un cuadrado entonces será múltiplo de $11^2=121$, y por tanto de la forma $121k^2$. Probando con $k=3,4,\ldots$ se llega a $121\cdot 8^2=7744$.

29. La suma de los coeficientes es igual al valor del polinomio evaluado en $x=1$, que en este caso es $(3+5-7)^{2020}=1^{2020}=1$.

30. 13, que se obtiene para 77 ($7\cdot 7=49$ y $4+9=13$).

31. 0, 1, 3, 4, 5 o 6.

Febrero

3. Obtuvo tres 20 y dos 18: $(20 + 20 + 20 + 18 + 18)/5 = 19,2$.

4. El área de cada hoja es $15 \cdot 20 = 300$ cm^2, y todas ocupan 3 m^2 o sea 30000 cm^2. Luego hay $30000/300 = 100$ hojas y el libro tiene 200 páginas.

5. 142857. El último dígito debe ser 7 para que al multiplicarlo por 3 termine en 1, el penúltimo debe ser 5 para que al multiplicarlo por 3 y sumarle 2 del acarreo termine en 7, y así se van sacando todos.

6. Con el hermano de Ana (y Ana con el hermano de Cleo).

7. Godfrey Harold Hardy nació el 7 de febrero de 1877 en Cranleigh, Inglaterra, y murió el 1 de diciembre de 1947 en Cambridge. Desde muy pequeño mostró una predisposición natural hacia la matemática y se cuenta que se entretenía factorizando los números de los himnos en la iglesia. En colaboración con John E. Littlewood realizó contribuciones importantes a varias áreas de la matemática, tales como el Análisis Diofántico, la suma de series divergentes, la función ζ de Riemann y la distribución de los números primos. También fue muy importante su relación con Ramanujan (vea la nota al 22 de diciembre), en quién Hardy inmediatamente reconoció un matemático genial: Hardy lo llevó a Cambridge en 1914, llenó los vacíos de su formación matemática autodidacta y fueron coautores de varios artículos hasta el regreso de Ramanujan a la India en 1919. Hardy es conocido también en Biología por la llamada *ley de Hardy-Weinberg*, un principio básico de la genética de poblaciones. Y la *fórmula asintótica de Hardy-Ramanujan* sobre particiones enteras ha sido ampliamente aplicada en Física nuclear y en Termodinámica. Su libro *Apología de un matemático* es considerado como una de las mejores miradas a la mente de un matemático para un público general.

10. $5! = 120$.

11. $4! = 24$ (y no $5!$ pues las ordenaciones que difieren en una rotación son iguales).

12. $4!/2 = 12$ (ahora además de rotarse la pulsera puede voltearse).

13. De 12 maneras. La primera y la última pueden ser A y U o bien U y A. Las tres consonantes del medio se pueden ordenar de $3! = 6$ maneras.

14. $5!/3! = 120/6 = 20$.

17. $\binom{7}{3} = 35$ maneras.

18. $\binom{8}{3} = 56$ maneras.

19. $\binom{8}{2} = 28$.

20. Si los catetos miden a y b entonces $a + b = 14 - 6 = 8$ y $a^2 + b^2 = 6^2$. Luego $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 8^2 - 6^2 = 28$ y el área buscada es $ab/2 = 7$.

21. $35700/0,85 = 42000$ Bs.

26. Sólo uno, el 777.

27. Cuatro: 1777, 7177, 7717 y 7771.

28. $\binom{8}{3} = 56$. Una vez elegidas las posiciones de los tres sietes, en las demás va 1.

Marzo

2. 2059.

3. $24 + 42 + 60 = 126$.

4. $\frac{2020}{2021}$, ya que como $2019 \cdot 2021 = (2020 - 1)(2020 + 1) = 2020^2 - 1 < 2020^2$, de donde $\frac{2019}{2020} < \frac{2020}{2021}$.

5. 1023.

6. $\frac{2021^2-1}{2020} = \frac{(2021+1)(2021-1)}{2020} = 2022$.

9. Uno de los dígitos debe ser primo y el otro 1, luego esos números son 13, 17, 31, 41, 61 y 71

10. 31/12/2018.

11. Si el número es $\overline{abc}$, entonces para cada c de 1 a 9, a puede variar de 1 hasta c, y $b = c - a$. Eso nos da $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ números.

12. Son nueve: 11, 13, 31, 17, 71, 37, 73, 79 y 97.

13. Hay 19. El primer dígito debe ser 1, 2, 3 o 4 y entre los dígitos siguientes debe haber al menos un 0. Esto nos da 4000, 3001, 3010, 3100, 2002, 2020, 2200, 2011, 2101, 2110, 1003, 1030, 1300, 1012, 1021, 1102, 1120, 1201, 1210.

16. 16.

17. La diferencia entre las canicas que tiene Andrés y el doble de las que tiene Luis es inicialmente $147 - 2 \cdot 57 = 33$. Por cada canica que le de Andrés a Luis esa diferencia disminuye en 3, luego si le da 11 se hace 0 y se logra lo deseado. También se puede hacer por tanteo. O planteando una ecuación: $147-x = 2(57+x)$, de donde $3x = 147 - 114 = 33$ y $x = 11$.

18. 12, los que están en el centro de cada arista.

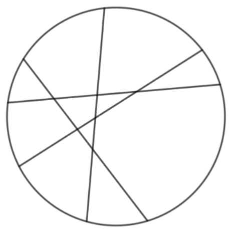
19. La Prueba *Canguro Matemático* es un programa de la *Asociación Canguros sin Fronteras*, representada en Venezuela por la *Asociación de Competencias Matemáticas* (ACM). Esta prueba se presenta en más de 90 países alrededor del mundo. Este año se espera una participación de más de seis millones de estudiantes, lo que la convierte en la prueba de matemática internacional y presencial más grande del mundo. La prueba se elabora entre todos los países participantes, que aportan problemas y luego en una reunión anual escogen los que integrarán cada nivel de la prueba. El día fijado para la prueba es el tercer jueves del mes de marzo de cada año.

20.

$$\begin{aligned}&(2 + 4 + 6 + \cdots + 2000) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 1999)\\ &= (2 - 1) + (4 - 3) + (6 - 5) + \cdots + (2000 - 1999)\\ &= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 1000.\end{aligned}$$

23. Emmy Noether nació el 23 de marzp de 1882 en Erlangen (Alemania) y murió el 14 de abril de 1935 en los Estados Unidos de América. Hija del matemático Max Noether, Emmy llegó a ser una notable matemática, especialista en la teoría de invariantes y conocida por sus contribuciones fundamentales al álgebra abstracta y a la física teórica. Considerada por Hilbert, Einstein y otros personajes como la mujer más importante en la historia de la matemática, revolucionó la teoría de anillos, la teoría de cuerpos y la de K-álgebras. Los *anillos noetherianos* son así denominados en su honor. En física, el *teorema de Noether* explica la conexión entre la simetría y las leyes de conservación.

24. El número de cubitos necesarios para construir un cubo de lado n cubitos es n^3. Los cubos menores que 100 son 1, 8, 27 y 64. Consruyendo un cubo de lado 3 y otro de lado 4 se utilizan $27 + 64 = 91$ cubitos y quedan 9 sin utilizar.

25. En 11 partes: 

26. 4 cortes para obtener 5 trozos de 1, 2, 3, 4 y 5 metros.

27. 10 años. Los demás hermanos tienen 12, 14, 16, 18 y 20.

30. Son iguales. Ambos valen $\dfrac{37 \cdot 73}{100}$.

31. En las posiciones múltiplos de 7 va una O. Y como $2020 = 7 \cdot 288 + 4$, en la posición 2020 va una G.

Abril

1. 5050. Se cuenta que cuando Gauss era niño la maestra propuso esta tares, esperando que los alumnos se tardaran un buen rato sumando, pero que Gauss respondió de inmediato. ¿Cómo lo hizo? Pues observando que $1 + 2 + \cdots + +99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$.

2. 299.

3. 36 cm^2, pues su lado mide $24/4 = 6$ cm.

6. $1 + \sqrt{1937}$, puesto que $1 + \sqrt{1937} > 1 + \sqrt{1936} = 1 + 44 = 45$ y como $45^2 = 2025$, entonces $\sqrt{2020} < 45$.

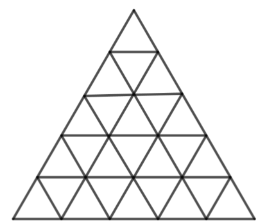
7. 10234.

8. 101.

13. 121. Basta escribir los cuadrados perfectos que siguen al 9: 16, 25, 36, 49, 64, 82, 100 y se llega a 121, que es capicúa.

14. No, porque todos son múltiplos de 11.

15. Leonhard Euler nació en Basilea, Suiza, el 15 de abril de 1707 y murió en San Petersburgo, Rusia, el 18 de septiembre de 1783. Fue el matemático más importante del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos. Es muy conocido por la fórmula $e^{\pi i} + 1 = 0$, que relaciona 5 de los números más importantes de la matemática, por sus desarrollos en serie y productos infinitos y por incontables resultados en todas las ramas de esta ciencia, además de haber originado nuevas ramas como la Topología y la Teoría de Grafos. Entre los participantes en olimpiadas matemáticas son populares el Teorema de Euler $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ para a coprimo con m, la *recta de Euler* que contiene el baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo, la fórmula $OI^2 = R(R - 2r)$ que expresa la distancia del circuncentro O al incentro I de un triángulo con los radios r y R de sus circunferencias inscrita y circunscrita, la igualdad $V - A + C = 2$ para poliedros convexos, la condición para que un grafo admita un recorrido que pase una y sólo una vez por cada arista, etc.

16. 25: 

17. 64 cm. Si el corte es horizontal y llamamos x a la altura de la parte con perímetro 56, entonces $20 + x + 20 + x = 56$, de donde $x = 8$. La altura de la otra parte es $20 - x = 12$ y su perímetro $20 + 12 + 20 + 12 = 64$.

20. $2020^3 - 1$ se factoriza como $(2020-1)(2020^2+2020+1)$, luego $\frac{2020^3-1}{2020^2+2021} = 2019$.

21. 54. Cada cara tiene un cuadrado interior de $3 \times 3 = 9$ cuadraditos que son las caras azules de los cubitos buscados.

22. $800 + 107 = 907$.

23. 0, porque $4^{1010} = (2^2)^{1010} = 2^{2 \cdot 1010} = 2^{2020}$, $16^{505} = 2^{4 \cdot 505} = 2^{2020}$ y $1024^{202} = 2^{10 \cdot 202} = 2^{2020}$.

24. 1.

27. 25.

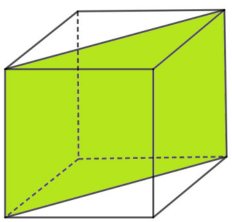
28. $\frac{1}{1011} + \frac{2020^2}{2021^2-1} = \frac{1}{1011} + \frac{2020}{2022} = 1$.

29. Si los lados de 12 cm y 13 cm fuesen los catetos, entonces la hipotenusa mediría $\sqrt{12^2 + 13^2} = \sqrt{313}$, que no es entero. Por lo tanto el lado de 13 cm debe ser la hipotenusa y el de 12 cm uno de los catetos. El tercer lado es el otro cateto y mide $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm.

30. Karl Friedrich Gauss nació en Brunswick, Alemania el 30 de abril de 1777 y murió en Göttingen el 23 de febrero de 1855. Fue matemático, astrónomo y físico e hizo aportes fundamentales en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el electromagnetismo, etc. Es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la historia. Pese a provenir de una familia campesina de padres analfabetos, Gauss pronto fue reconocido como un niño prodigio. Existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad, como la de la suma de los números del 1 al 100, aunque no están bien documentadas. A los 19 años demostró que el polígono regular de 17 lados se puede construir con regla y compás, y de hecho determinó cuáles polígonos regulares son construibles de esta manera y cuáles no. Su obra magna *Disquisitiones arithmeticae* la completó a los veintiún años, y ha moldeado la Teoría de Números hasta el presente. Fue el primero en probar rigurosamente el teorema fundamental del álgebra, en su tesis doctoral en 1799. En las olimpiadas matemáticas se usa profusamente su teoría de congruencias aritméticas, y en los niveles más avanzados los residuos cuadráticos.

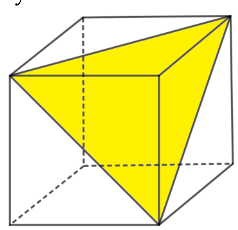
Mayo

4. Los planos de cada cara son 6 y cumplen la condición. Pero hay 6 más, los planos diagonales que pasan por cada par de aristas opuestas. Total 12.



5. Estos planos son los que pasan por los 3 vértices adyacentes a uno dado.

Como hay 8 vértices, hay también 8 de estos planos.



6. q no puede ser impar, pues en ese xaso $p = 7q + 3$ sería un par mayor que 2 y no sería primo. Luego $q = 2$ u $p = 17$.

7. 599999.

8. Si $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{99}$, entonces $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{99} + 2^{100} = S - 1 + 2^{100}$, de donde $S = 2^{100} - 1$. Claro que si se conoce la fórmula que da la suma de una progresión geométrica también se puede aplicar aquí.

11. 10.

12. Maryam Mirzajani nació en Teherán, Irán, el 12 de mayo de 1977 y falleció en Stanford, California, Estados Unidos de América el 14 de julio de 2017. Obtuvo medallas de oro en la IMO en 1994 y en 1995 con prueba perfecta. Sus originales investigaciones sobre geometría hiperbólica, análisis complejo, superficies de Riemann, topología y sistemas dinámicos conectan varias disciplinas matemáticas e influyen en todas ellas. En 2014 fue galardonada con la Medalla Fields, siendo la primera mujer en recibir este premio que muchos consideran el equivalente al premio Nobel en el campo de las matemáticas.

13. 16 (todos los enteros desde el 2 hasta el 18).

14. 4, 5 y 6.

15. 13 años. Las condiciones se pueden expresar como $J = A + 7$, $J + 1 = 2(A + 1)$. Luego $A + 8 = 2A + 2$, de donde $A = 6$ y $J = 13$.

18. Las condiciones se pueden expresar como $B = 2A$ y $B + (2B - A) = 35$. Resolviendo resulta que Ana tiene 7 años y Bruno 14.

19. Sea n el número de caramelos y supongamos que cuando Berta los agrupa de 4 en 4 obtiene k grupos. Entonces $n = 4k$, y por otra parte $n = 3(k + 5)$. Se sigue que $4k = 3(k + 5)$, $k = 15$ y $n = 60$.

20. El primer dígito puede ser cualquiera excepto el 0, o sea que se puede elegir de 9 maneras. El segundo puede ser cualquier dígito (incluso el 0) diferente del primero, y también se puede elegir de 9 maneras. El dígito de las unidades se puede elegir de 8 maneras, pues debe ser diferente a los dos primeros. Luego la respuesta es $9 \times 9 \times 8 = 648$.

21. $5 \times 5 \times 8 = 200$.

22.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}\\
&\qquad = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\\
&\qquad = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.
\end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{97\cdot 99}\\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right)\\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{99}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{98}{99} = \frac{49}{99}.
\end{aligned}$$

26. Los dígitos de las unidades de 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5,… son una sucesión periódica: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1,… Observamos que en todas las posiciones divisibles entre 4 (4, 8, 12, etc.) va un 1, y como 2020 es divisible entre 4, la respuesta es 1.

27. Del 1 al 100 el 7 aparece como dígito de las unidades en 10 números (7, 17,. . . , 97) y como dígito de las decenas en otros 10 (70,71,. . . , 79). Eso da 20 sietes, y con otros 7 del 101 al 200 se obtiene como respuesta 40.

28. $\log_2 \sqrt[3]{32} = \frac{1}{3}\log_2 2^5 = \frac{5}{3}\log_2 2 = \frac{5}{3}$.

29. $\log_2 0,0625 = \log_2 \frac{1}{16} = -\log_2 16 = -4$.

Junio

1. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, luego $\mathrm{mcd}(120, 252) = 2^2 \cdot 3 = 12$. O con el algoritmo de Euclides $252 = 2 \cdot 120 + 12$, 12 divide a 120, luego el mcd es 12.

2. Aquí la descomposición en producto de primos no es viable, pero cualquier divisor común debe dividir a la diferencia $1234567893 - 1234567891 = 2$, luego es 1 o 2. Pero 2 no es vivisor de esos números, luego el único divisor (y por lo tanto el mcd) es 1.

3. Por el algoritmo de Euclides $600000039 = 2\cdot300000015+9$, y 9 divide a 300000015 (por el criterio de la suma de dígitos). Luego el mcd es 9.

4. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ es divisible entre 3 pero no entre 9, luego (por los criterios de divisibilidad entre 3 y 9) cualquier entero que los tenga como dígitos es divisible entre 3 pero no entre 9.

5. No, porque es divisible entre 3 pero no entre 9, y cualquier cuadrado perfecto divisible entre 3 debe serlo también entre 9,

8. 3^{200}, pues

$$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100} > 8^{100} = (2^3)^{100} = 8^{300}.$$

9. 17^{14}, pues $17^{14} > 16^{14} = 2^{4\cdot14} = 2^{56}$, mientras que $31^{11} < 32^{11} = 2^{5\cdot11} = 2^{55}$.

10. Comencemos por observar que $2^7 = 128 > 125 = 5^3$. Luego
$4^{52} = 2^{104} = 2^{7\cdot14+6} = 128^{14}2^6 > 125^{14} \cdot 64 = 5^{42} \cdot 64 > 5^{42} \cdot 5^2 = 5^{44}$.

11. $2^{xy} = (2^x)^y = 5^y = 16$, de donde $xy = 4$.

12. $2^{3xy} = 8^{xy} = (8^x)^y = 25^y = (125^{\frac{2}{3}})^y = (125^y)^{\frac{2}{3}} = 64^{\frac{2}{3}} = 16$, de donde $3xy = 4$ y $xy = \frac{4}{3}$.

15. No, porque un cuadrado perfecto sólo puede terminar en 0, 1, 4, 5, 6 o 9.

16. Si la recta no pasa por ningún vértice entonces corta a cada lado del polígono en un punto interior, y hay exactamente 11 puntos de corte. Pero si la recta corta a un lado entrando en el interior del polígono, entonces tiene que salir del polígono cortando a otro lado. Por lo tanto el número de puntos de corte debe ser par, contradicción.

17. El radio del círculo amarillo es $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, luego el lado del triángulo equilátero circunscripto es $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}$, y es igual al diámetro del semicírculo. Por lo tanto el área del semicírculo es $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{6}{\pi} = 3$.

18. Esos cubitos son los que se encuentran entre cada par de cubitos ubicados en vértices adyacentes del cubo grande Por lo tanto son $12 \cdot 3 = 36$.

19. Blaise Pascal nació el 19 de junio de 1623 en Clermont-Ferrand, Prancia, y murió el 19 de agosto de 1662 en Paris. Fue matemático, físico, filósofo y escritor. Construyó una de las primeras calculadoras mecánicas. Realizó importantes investigaciones sobre los fluidos. Hizo aportes a la Combinatoria y fue, junto con Fermat, uno de los creadores de la Teoría de Probabilidades. A los 16 años estableció un importante teorema, muy usado en problemas olímpicos de geometría: Si un hexágono ABCDEF se encuentra inscrito en una cónica, entonces los puntos de intersección de los pares de rectas AB y DE, BC y EF, CD y FA están alineados.

22. A las 8:59 am.

23. $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$.

25. $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$.

26. $5 \cdot 5 \cdot 1 = 20$. Observe que una vez elegidos los dos primeros dígitos, hay un único valor posible para el tercero que hace al número múltiplo de 9.

29. Si las potencias sucesivas de 3 (3, 9, 27, 81, 243, 729,. . .) se dividen entre 7, se obtiene una sucesión de restos periódica de periodo 6: 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1,. . . Como $2020 = 6 \cdot 336 + 4$, 3^{2020} deja resto 4.

30. Si los lados del rectángulo son $a > b$ entonces $2a+b = 22$ y $a+2b = 20$. Sumando miembro a miembro resulta $3a + 3b = 42$, de donde $a + b = 14$ y el perímetro es $2a + 2b = 28$ cm.

Julio

1. $70 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 7 = 705600$ veces.

2. $24 \cdot 60/360 = 4$ minutos.

3. Tiene 16: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000. Si se conoce la fórmula para el número de divisores, como $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ entonces tiene $(3+1)(3+1) = 16$ divisores.

6. Hay dos, los de lados 3, 3, 1 y 2, 2, 3.

7. Los triángulos con lados enteros y perímetro 12 son los de lados 5, 5, 2; 5, 4, 3 y 4, 4, 4. El único escaleno es el de lados 5, 4 y 3.

8. Falso. Si $a > 0$, $\sqrt{a}$ denota la raíz cuadrada positiva de a. Luego $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. En general se cumple que $\sqrt{x^2} = |x|$.

9. Como $\sqrt{3} - 1 > 0$ y $\sqrt{3} - 2 < 0$, se tiene que $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1$.

10. $\sqrt{5} - 2 \gtreqless 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{5} + \sqrt{3} \gtreqless 4 \Leftrightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 \gtreqless 4^2$

$\Leftrightarrow 8+2\sqrt{15} \gtreqless 16 \Leftrightarrow \sqrt{15} \gtreqless 4 \Leftrightarrow 15 \gtreqless 4^2 = 16$,
y como $15 < 16$ se concluye que $\sqrt{5}-2 < 2-\sqrt{3}$.

13. Dos. Hay dos posibiidades: 1) Si Ana dice la verdad, entonces Bea miente, Cleo dice la verdad y Dora miente. 2) Si Ana miente, entobces Bea dice la verdad, Cleo miente y Dora dice la verdad. En ambos casos hay dos que mienten.

14. 18.

15. Se vuelven a encontrar transcurridos $\mathrm{mcm}(6,7) = 42$ minutos, es decir a las 8:42 am.

16. 8 números: 666, 669, 696, 699, 966, 969, 996 y 999.

17. Terence Tao nació el 17 de julio de 1975 en Adelaida, Australia, de padres emigrantes de Hong Kong. Desde una temprana edad Tao exhibió habilidades extraordinarias para la matemática, y a los 9 años ya asistía a clases de nivel universitario. En 1986, 1987 y 1988 Tao fue el participante más joven de la historia en la Olimpiada Internacional de Matemática, ganando medallas de bronce, plata y oro respectivamente. A los 14 años comenzó a asistir al Research Science Institute del MIT. A los 20 años obtuvo un PhD en la Universidad de Princeton. Recibió el Premio Salem en 2000, el Premio Bôcher en 2002 y el Clay Research Award en 2003 por sus contribuciones al análisis, incluyendo su trabajo sobre la conjetura de Kakeya y sobre los mapas de ondas. En 2005 recibió el premio Levi L. Conant de la American Mathematical Society junto con Allen Knutson y en 2006 recibió el premio SASTRA Ramanujan. En el año 2006 recibió también la Medalla Fields, que muchos consideran el equivalente al premio Nobel en el campo de las matemáticas.

20. El producto de un lado por la altura sobre ese lado es constante, pues es el doble del área del triángulo. Luego si la altura desde el vértice B hasta el lado AC es h, se tiene que $9h = 6\cdot 3$ de donde $h = 2$ cm.

21. Cuatro. Si extrae 3 podrían ser todos de color diferente, pero con 4 necesariamente se repite algún color.

22. Doce. Si extrae 11, podrían ser 6 blancas y 5 rojas.

23. Ocho. Si extraen 7 podrían ser 4 marrones de un mismo pie y 3 negros de un mismo pie.

27. Un entero divisible entre 6 y entre 15 es divisible entre 30. Como $30\times 33 = 990$ y $30\times 34 = 1020$, la respuesta es 1020.

28. Debe ser múltiplo de $\mathrm{mcm}(6,15,35) = 210$ y como $210{\cdot}48 = 10080$ pero $210{\cdot}47 = 9870$, es 10080.

29. $\sqrt{17} \gtreqless \frac{103}{25} \Leftrightarrow 17 \gtreqless \frac{103^2}{25^2} \Leftrightarrow 17\cdot 25^2 \gtreqless 103^2$, y como $17\cdot 25^2 == 10625 > 10609 = 103^2$, el mayor es $\sqrt{17}$.

30. Como un triángulo no puede tener dos ángulos de $100°$, los iguales son los otros dos y miden $45°$ cada uno.

31. Si $\alpha = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, entonces $2\alpha = \beta+\gamma$ y $3\alpha = \alpha+\beta+\gamma = 180°$, de donde $\alpha = 60°$.

Agosto

3. 47 años.

4. 81 cm^2.

5. Si los lados del rectángulo miden a y b entonces $ab = 9$. El perímetro es $2(a+b)$, pero como $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, se tiene $2(a+b) \geq 4\sqrt{ab} = 12$. Luego el perímetro mínimo es 12 cm, y se alcanza en el caso del cuadrado con $a = b = 3$.

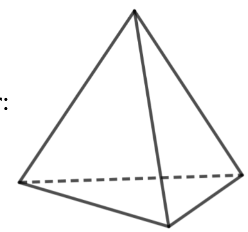
6. Con la misma notación del anterior, $2(a+b) = 8$ y $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, de donde $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$. Luego el área máxima es 4 cm^2 y se alcanza en el caso del cuadrado con $a = b = 2$.

7. 985674321.

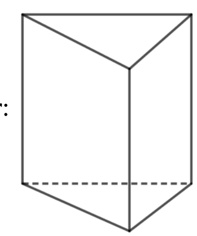
10. El triángulo tiene dos lados iguales, luego es isósceles y el ángulo no marcado mide también $72°$. E pedido mide entonces $180° - 72° - 72° = 36°$.

11. Como $180° - 74° - 32° = 74°$ el triángulo tiene dos ángulos iguales, luego es isósceles y el lado pedido mide también 3 cm.

12. Un tetraedro regular:



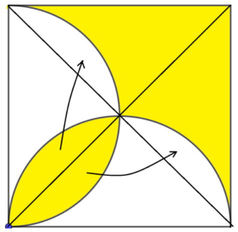
13. Un prisma de base triangular:



14. El lado del triángulo mide $12/3 = 4$ cm, luego el lado del cuadrado también mide 4 cm y su área es 16 cm^2.

17. Pierre de Fermat nació en Beaumont-de-Lomagne, Francia, el 17 de agosto de 1601 y murió el 12 de enero de 1665. Fermat fue junto con René Descartes y Johannes Kepler uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. Fue cofundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal, descubrió independientemente de Descartes el principio de la geometría analítica y anticipó el cálculo diferencial. Sin embargo es más conocido por su trabajo en teoría de números y en particular por el conocido como *último teorema de Fermat*, el cual afirma que para $n > 2$ la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones en enteros no nulos. Esto ocupó a los matemáticos durante aproximadamente 350 años, hasta que fue demostrado en 1995 por Andrew Wiles. Los estudiantes ol+impicos utilizan mucho el llamado *teorema pequeño de Fermat*, a saber que si p es primo y a un entero no divisible entre p entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

18. La mitad:



19. En una hora el primer grifo llena $\frac{1}{2}$ tanque y el segundo $\frac{1}{3}$ de tanque, luego los dos untos llenan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Para llenar el tanque completo requieren entonces $\frac{6}{5}$ de hora o sea 1 hora y 12 minutos.

20. Los alumnos de primer año son el cuádruple de los que están en la clase de Juan, por lo tanto son el 40 % del total del colegio.

21. Augustin Louis Cauchy nació en París, Francia, el 21 de agosto de 1789 y murió el 23 de mayo de 1857. Cauchy fue uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, con cerca de 800 publicaciones. Su investigación cubre el conjunto de áreas matemáticas de la época. En Análisis precisó los conceptos de función, de límite y de continuidad dándoles su forma actual. También sentó las bases del análisis complejo, y sus trabajos sobre permutaciones fueron precursores de la teoría de grupos. En las olimpiadas matemáticas es de gran utilidad la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*.

24.

$$256^{\frac{3}{8}} = (2^8)^{\frac{3}{8}} = 2^3 = 8.$$

25.

$$\left(\frac{1}{3125}\right)^{-\frac{2}{5}} = (5^{-5})^{-\frac{2}{5}} = 5^2 = 25.$$

26.

$$\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{49}{81}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - \frac{7}{9} = 1.$$

27. La suma de los ángulos interiores mide $180(5-2) = 540°$, luego cada uno mide $540/5 = 108°$.

28. $180(9-2)/9 = 140°$.

31. La suma de las raíces es 20, y los pares de primos que suman 20 son $\{3, 17\}$, y $\{7, 13\}$. Como El k es el producto de las raíces, hay dos valores posibles: 51 y 91.

Septiembre

1. Hay varias formas de hacerlo. Por ejemplo $1-2(3-4(5-6(7-8))) = 1-2(3-4(5-6(-1))) = 1-2(3-4(5+6)) = 1-2(3-44) = 1+82 = 83$. Otra forma es $1-2(3-4(5-6(7-8))) = 1-6+8(5-6(7-8)) = -7+40-48(-1) = -7+40+48 = 82$.

2. $9(8-7(6-5(4-3(2-1)))) = 9(8-7(6-5(4-3))) = 9(8-7(6-5)) = 9(8-7) = 9$.

3. Para cada una de las seis persona se puede elegir otra para darle la mano de 5 maneras, lo que da $6 \times 5 = 30$ apretones de mano. Pero de esta manera cada apretón está contado dos veces, por lo cual la respuesta correcta es $30/2 = 15$. El que conozca los coeficientes binomiales puede responder de inmediato $\binom{6}{2} = 15$.

4. $\binom{5}{3} = 10$. Claro que esto también se puede hacer por enumeración, dibujando todos los triángulos posibles,

7.

$$(x-1)(x^2-x+1) = x^3 - 1.$$

8. Marin Mersenne nació en Oizé, Francia, el 8 de septiembre de 1588 y murió en París el 1 de septiembre de 1648. Fue un sacerdote que estudió diversos campos de la teología, la matemática y la teoría musical. Fue educado en la universidad jesuita de La Flèche, donde conoció y frecuentó la amistad de René Descartes. Su contribución más importante al avance del conocimiento fue la extensa correspondencia que mantuvo, en latín, con matemáticos y científicos de diversos países. En un tiempo en el que las revistas científicas aun no existían, Mersenne fue lo más parecido al centro de una red de intercambio de información científica. Hoy en día Mersenne es recordado principalmente por los números que llevan su nombre: los llamados *primos de Mersenne*. Mersenne los introdujo en 1641 e hizo varias conjeturas sobre ellos, algunas de las cuales solo pudieron ser comprobadas o refutadas en el siglo XX. Hasta hoy se conocen 51 primos de Mersenne, entre los cuales se halla el mayor número primo conocido, el $2^{82589933} - 1$, que tiene 24862048 dígitos. Estos números son importantes por varias razones y su búsqueda se realiza en forma distribuida a través de internet, vea `https://www.mersenne.org`.

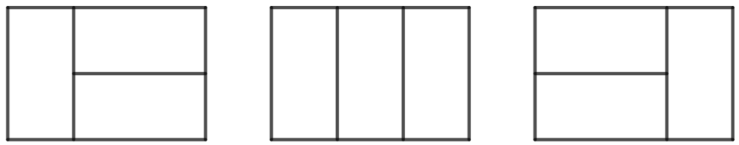
9. Pongamos $x = 2^{101}$. Entonces $2^{303} - 1 = x^3 - 1 = (x-1)(x^2-x+1)$ lo que muestra que es compuesto.

10. $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$.

11. Es claro que $n > 1$, ya que $2^1 - 1 = 1$ no es primo. Si n fuese compuesto, digamos $n = rs$ con $r, s > 1$, entonces poniendo $x = 2^r$ por el problema de ayer se tendría $2^n - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r)^s - 1 = x^s - 1 = (x-1)(x^{s-1} + x^{s-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$ y $2^n - 1$ sería compuesto, contradicción.

14. De dos maneras, una con los dominós horizontales y otra con los dominós verticales.

15. De tres maneras:



16. De cinco maneras. Si a la izquierda se pone un dominó vertical, lo que queda se puede completar de 3 maneras. Si en cambio se ponen 2 dominós horizontales, lo que queda se puede completar de 2 maneras.

17. Bernhard Riemann nació en Breselenz, Alemania, el 17 de septiembre de 1826 y murió en Verbania, Italia, el 20 de julio de 1866. Fue un matemático que realizó contribuciones muy importantes al análisis y a la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre aparece en muchas ramas de la matemática, por ejemplo la *integral de Riemann*, las *variedades Riemannianas*, la *función ζ de Riemann*, etc. La *hipótesis de Riemann* sobre la ubicación de los ceros de la función ζ, por su relación con la distribución de los números primos es uno de los problemas abiertos más importantes en la matemática contemporánea. El Instituto Clay de Matemáticas ha ofrecido un premio de un millón de dólares a la primera persona que desarrolle una demostración correcta de la conjetura.

18. 9.

21. Llamenos D_n al número de maneras de completar un tablero de $2 \times n$ con n dominós de 2×1. Entonces $D_2 = 2$, $D_3 = 3$ y con la idea del día 16 se observa que $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$. Por lo tanto $D_4 = 2 + 3 = 5$, $D_5 = 3 + 5 = 8$, $D_6 = 5 + 8 = 13$, $D_7 = 8 + 13 = 21$, $D_8 = 13 + 21 = 34$, $D_9 = 21 + 34 = 55$, $D_{10} = 34 + 55 = 89$.

22. El primer dígito se puede escoger de 3 maneras (no puede ser 0). El segundo dígito puede ser cualquiera de los 3 que quedan, el tercero cualquiera de los 2 que quedan y el cuarto el único que queda. Total $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ números.

23. 1305.

24. $\log_{27} 81 = \log_{27} 3^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$.

25. $\log_2 5 \cdot \log_5 64 = \log_2 64 = 6$.

28. $\log_2 3 \cdot \log_{27} 32 = \frac{1}{3} \log_2 27 \cdot \log_{27} 32 = \frac{1}{3} \log_2 2^5 = \frac{5}{3}$.

29. Hay que escoger 3 vértices de 6, respuesta $\binom{6}{3} = 20$.

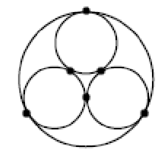
30. Como $1 + (x-1)(x+1) = 1 + x^2 - 1 = x^2$, se tiene que

$$\sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2016\sqrt{1 + 2017\sqrt{1 + 2018 \cdot 2020}}}}$$
$$= \sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2016\sqrt{1 + 2017 \cdot 2019}}}$$
$$= \sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2016 \cdot 2018}} = \sqrt{1 + 2015 \cdot 2017} = 2016.$$

Octubre

1. En el piso 14.

2. Como hay 6 pares de circunferencias, el máximo número de puntos es 6. Este máximo se alcanza si tres circunferencias son tangentes exteriormente y la cuarta es tangente exteriormente (o interiormente) a las tres primeras.



5. Cédric Villani nació en Brive-la-Gaillarde, Francia, el 5 de octubre de 1973. Es un matemático especialista en ecuaciones en derivadas parciales y física matemática. En el año 2009 obtuvo los premios Fermat y Poincaré. En el año 2010, a sus 37 años, recibió la Medalla Fields por su trabajo en el campo del amortiguamiento de Landau y la ecuación de Boltzmann.
También ha incursionado en la política y desde 2017 es diputado en la Asamblea Nacional de Francia.

6. 19.

7. 3 a 0.

8. 12.

9. Sean r y R los radios de la circunferencia y de la semicircunferencia, respectivamente. Entonces $\pi r^2 = 2$ y como $2R$ es el lado del triángulo circunscripto a la circunferencia amarilla, su altura es $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$, de donde $r = R\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $R = r\sqrt{3}$. Por lo tanto $\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 3r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2 = 3$.

13. Se necesitan 9 dígitos para los números del 1 al 9 y 3 para el 100. Para cada uno de los 90 números del 10 al 99 se necesitan 2 dígitos, para un total de 180. La respuesta es $9 + 3 + 180 = 192$.

14. En la posición de las unidades hay que escribir 10 sietes (7, 17, 27,…, 97) y en la posición de las decenas otros 10 (70, 71, 72,…, 79). La respuesta es 20.

15. Mil sietes en la posición de las unidades, mil en las decenas, mil en las centenas y mil en las unidades de 1000, para un total de 4000 sietes.

16. Hay cuatro: 8999, 9899, 9989 y 9998.

19. $2x + 9 = 5x + 3 \Leftrightarrow 6 = 3x \Leftrightarrow x = 2$.

20. $(x-2)^2(x-5)^3 = 0$ sólo se satisface para $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$.

21. $\dfrac{1}{2x-3} = \dfrac{1-x}{x^2-4x+3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2x-3} = \dfrac{1}{3-x} \Leftrightarrow 3 - x = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 2$.

22. $2^{x+3} = 128 \Leftrightarrow x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 4$.

23. $2^{2x-5} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2x - 5 = -3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

26. $\log_2(3x-1) = 3 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2^3 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$.

27. $x + \frac{6}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 6 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$, que tiene soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

28. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = 2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow$ $x^2 = 2$, que tiene soluciones $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$.

29. Poniendo $u = 2^x$, $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ es equivalente a $u^2 - 12u + 32 = 0$, o sea $(x-4)(x-8) = 0$, que tiene soluciones $u_1 = 4$ y $u_2 = 8$, a las que corresponden $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

30. $\log_2(5 \cdot 2^{x-1} - 1) = 2x \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x-1} - 1 = 2^{2x}$ que poniendo $u = 2^x$ es equivalente a $\frac{5}{2}u - 1 = u^2$, o bien $(u-2)(u-\frac{1}{2}) = 0$, que tiene soluciones $u_1 = 2$ y $u_2 = \frac{1}{2}$, a las que corresponden $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Noviembre

2. Cuatro gatos. Dos moscas y 3 arañas tienen $2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 36$ patas. Diez pájaros tienen 20 patas. Para llegar a 36 faltan 16 patas, que se consiguen con 4 gatos.

3. 1302.

4. 1305.

5. 12:10 pm.

6. Dentro de 14 minutos, cuando mostrará 21:05.

9. El puesto 13. Los primeros 12 son 1003, 1012, 1021, 1030, 1102, 1111, 1120, 1201, 1210, 1300, 2002 y 2011.

10. 8811 que es $9910 - 1099$.

11. $10^{101} - 1$ consta de 100 nueves. $10^{101} - 101$ es entonces $\underbrace{999\ldots99}_{97\ 9\text{'s}}899$ y la suma de sus dígitos es $99 \cdot 9 + 8 = 899$.

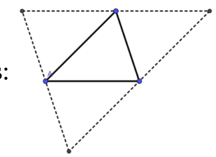
12. Ese mes debió tener 31 días, comenzando en domingo y finalizando en martes. Luego el 1, 8 y 15 fueron domingo y el 19 fue jueves.

13. Ese mes tiene 30 días, comenzando en sábado y finalizando en domingo. Luego el mes siguiente tiene 31 días comenzando en lunes, por lo tanto tiene 5 lunes, 5 martes y 5 miércoles, que son los días 3, 10, 17, 24 y 31.

16. El número era $372/31 = 12$, luego de no haberse equivocado habría obtenido $12 \cdot 301 = 3612$.

17. August Möbius nació el 17 de noviembre de 1790 en Sajonia, Alemania, y murió el 26 de septiembre de 1868 en Leipzig. Möbius fue el primero en introducir las coordenadas homogéneas en geometría proyectiva. En Teoría de Números se le deben la *función de Möbius* $\mu(n)$ y la *fórmula de inversión de Möbius*. Pero es conocido sobre todo por su descubrimiento en 1858 de la *cinta de Möbius*, una superficie de dos dimensiones no orientable con una sola cara. Hoy en día su invento ha generado numerosos diseños industriales: cintas transportadoras, correas abrasivas y cartuchos de tinta que duran el doble de tiempo al utilizarse de manera óptima su única cara.

18. Hay 3 posibilidades:



19. Las operaciones que realizó Francisco equivalen a sumarle 49 al número, que por lo tanto era $777 - 749 = 28$. También se puede resolver planteando una ecuación; si x es el número buscado, entonces $(\frac{x}{7} + 7)7 = 777$, de donde $x + 49 = 777$ y $x = 728$.

20. Si x es el número de viajes en que transportó 6 camionetas, en los otros $5 - x$ viajes transportó 10 carros y en total transportó $6x + 10(5-x)$ vehículos. Luego $50 - 4x = 42$, de donde $x = 2$ y transportó $6 \cdot 2 = 12$ camionetas.

23. Los números de 1 a n ocupan $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$ posiciones. Como $63 \cdot 64/2 = 2016$, en la posición 2020 está el 64.

24. Hay que agregar un dígito x tal que $2 + 5 + 7 + 6 + 2 + x = 22 + x$ sea múltiplo de 3, lo que ocurre para 2, 5 y 8. Pero además $\overline{2x} = 20 + x$ debe ser múltiplo de 4, lo que ocurre para 0, 4 y 8. El único dígito que cumple ambas condiciones es el 8. Otra forma es hacer la división larga de $25762x$ y observar que solamente da exacta si $x = 8$.

25. Como $365 = 52 \cdot 7 + 1$, de una fecha a la misma del año siguiente el día de la semana se adelanta en 1. Pero si entre las dos fechas está el 29 de febrero de un año bisiesto el adelanto es de 2 días. Luego el 25/11/2021 será jueves, el 25/11/2022 será viernes, el 25/11/2023 será sábado, el 25/11/2024 será lunes, el 25/11/2025 será martes y el 25/11/2026 será miércoles.

26. Juan piensa 3 números. Si los números son a, b y c entonces $a + b = 13$, $a + c = 15$ y $b + c = 18$. Sumando las tres ecuaciones resulta $2a + 2b + 2c = 46$, de donde $a + b + c = 23$ y $a = 23 - (b+c) = 23 - 18 = 5$, $b = 23 - 15 = 8$ y $c = 23 - 13 = 10$.

27. Como $2^{9^x} = 2^{3^{2x}}$ y $8^{3^y} = (2^3)^{3^y} = 2^{3 \cdot 3^y} = 2^{3^{y+1}}$, si estas dos cantidades son iguales entonces debe ser $2x = y + 1$.

30. Por la fórmula de cambio de base $\dfrac{\log_2 81}{\log_2 3} = \log_3 81 = 4$.

Diciembre

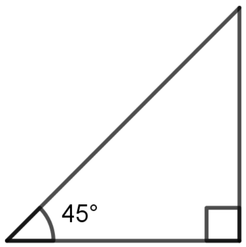
1. La mitad de su peso son 12 kg, luego Juan pesa 24 kg.

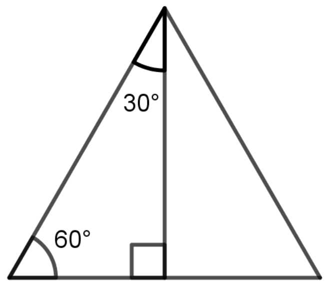
2. Ocho pares: $(1,90)$, $(2,45)$, $(5,18)$, $(10,9)$, $(9,10)$, $(18,5)$, $(45,2)$ y $(90,1)$.

3. $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ tiene 12 divisores.

4. Son tantos como los divisores de $1440/15 = 96 = 2^5 \cdot 3$, es decir 12.

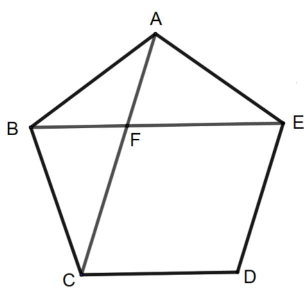
7. A partir de un triángulo rectángulo con catetos 1 y 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$ obtenemos $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan 45^\circ = 1$. A partir de un triángulo rectángulo con catetps 1 y 2 e hipotenusa $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ obtenemos $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.





8. $\cos 15^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4} = \frac{8+2\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}$, $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

9. Por simetría $CD \parallel BE$ y $DE \parallel CA$.



10. Sea d la longitud de una diagonal y sea F la intersección de AC y BE. Como $CDEF$ es un paralelogramo se sigue que $CF = FD = CD = 1$ y $FB = FA = d-1$. Como $\angle BFA = \angle CFE = \angle CDE$ resulta que los triángulos BFA y CDE son isósceles y semejantes. Luego $BF/BA = CD/CE$ o sea $d - 1 = 1/d$, de donde $d^2 - d - 1 = 0$ y $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

11. Comenzamos por construir un triángulo rectángulo ABK con $AB = 1$ y $BK = 2$. Entonces $AK = \sqrt{5}$. Poniendo un segmento KL de longitud 1 a continuación de AK se tiene $AL = \sqrt{5} + 1$, y si M es el punto medio de AL entonces $AM = (\sqrt{5} + 1)/2$. Sea ahora C un punto de intersección de la circunferencia Γ de centro A que pasa por M con la circunferencia de centro B y radio 1. A, B y C son tres vértices consecutivos del pentágono regular. Otro vértice D se obtiene intersectando Γ con la circunferencia de centro C y radio 1, y el quinto vértice se obtiene fácilmente.

14. En el diagrama del día 9 pasado, ABF es un triángulo isósceles con $AB = 1$, $BF = BE - FE = d - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $\angle AFE = \angle CDE = 108^\circ$. Luego $\angle ABF = 36^\circ$. Si M es el punto medio de AB, entonces BFM es rectángulo en M y $\cos 36^\circ = \frac{BM}{BF} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

15. $\operatorname{sen} 36^\circ = \sqrt{1 - (\cos 36^\circ)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - (\sqrt{5}+1)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

16. Es claro que x debe ser impar y como $x^2 - 81 = (x+9)(x-9)$, y ambos factores no pueden ser múltiplos de 5 (pues la diferencia 18 no lo es), uno de ellos debe ser múltiplo de 25 y por lo tanto de 50. Eso conduce a las 4 soluciones 9, 41, 59 y 91.

17. $(2 \cdot 0{,}20 + 3 \cdot 0{,}30)/5 = 0{,}26$, 26 %.

18. $2^{2020} \cdot 5L2025 = 5^5 \cdot 10^{2020} = 3125 \cdot 10^{2020}$ y la respuesta es $3 + 1 + 2 + 5 = 11$.

21. Ocho bombones pesan $330 - 274 = 56$ g, luego cada bombón pesa 7 g, los 30 bombones pesan 210 g y la caja pesa $330 - 210 = 120$ g.

22. Srnivasa Ramanujan Srinivasa Aiyangar Ramanujan nació en Erode, India, el 22 de diciembre de 1887 y murió el 26 de abril de 1920. Fue un matemático autodidacta que, con una mínima educación académica, hizo contribuciones extraordinarias al análisis matemático, la teoría de números, las series y las fracciones continuas. Ramanujan desarrolló inicialmente su propia investigación en forma aislada, que fue rápidamente reconocida por los matemáticos indios. Cuando sus habilidades se hicieron conocidas en Europa, comenzó su famosa colaboración con el matemático británico G. H. Hardy. Durante su corta vida, Ramanujan compiló casi 3900 resultados, muchos de los cuales son a la vez originales y muy poco convencionales, como los números primos de Ramanujan y la función theta de Ramanujan, que a su vez han inspirado una gran cantidad de investigaciones. Una famosa anécdota sobre Ramanujan es contada así por Hardy: "Recuerdo una vez que fui a verle cuando estaba enfermo en Putney. Había viajado en el taxi número 1729 y remarqué que me parecía un número intrascendente, y esperaba de él que no hiciera sino un gesto desdeñoso. No, me respondió, es un número muy interesante: es el número más pequeño expresable como la suma de dos cubos de dos maneras diferentes".

23. $12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3 = 1729$.

28. $x^2 + y^2 + x + y = 12 - 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x+y) - 12 = 0$, luego $u = x + y$ satisface $u^2 + u - 12 = 0$, que tiene soluciones 3 y -4. Como x e y son positivos, $x + y = 3$.

29. Cada hoja contiene 4 páginas que son (1,2,59,60), (3,4,57,58), (5,6,55,56), (7,8,53,54), etc. Luego si falta la página 7 también faltan 8, 53 y 54.

30. Es 14: $1 + 2 + 7 + 14 = 24 = 1 + 3 + 5 + 15$.

www.acmven.org

Diseño, problemas y soluciones: José H. Nieto S.