Asociación Venezolana
de Competencias
Matemáticas

CALENDARIO MATEMÁTICO

FUNDECOM
Fundación para el Desarrollo de
Competencias Matemáticas

2014

J-00110574-3

fundación
EMPRESAS POLAR

Presentación del Calendario Matemático 2014

El presente es el séptimo Calendario Matemático elaborado con motivo del Programa de Olimpiadas Matemáticas, que lleva adelante la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la Fundación Para el Desarrollo de Competencias. El mismo tiene como objetivo facilitar a docentes y alumnos un grupo de problemas de matemáticas recreativas, junto con una serie de pequeños artículos de divulgación de temas matemáticos o sugerencias de trabajo en el aula. Para esto último contamos con la colaboración de un grupo de colegas de varias instituciones nacionales e internacionales, quienes gustosamente nos ofrecen su apoyo año tras año.

El año 2014 tiene un atractivo especial y no podemos estar al margen de eso. En Brasil se celebrará el campeonato mundial de fútbol. Ya por todas partes comienza la promoción de un evento, que seguro atraerá la atención de una gran cantidad de personas en todos las países del mundo. Como cualquier otra competencia deportiva, ésta se presta para el análisis de las probabilidades de ganar que tiene cada equipo en la contienda, las estadísticas que permitirán de una manera más objetiva determinar quién fue el mejor jugador, el más efectivo para su equipo, el arquero que permitió menos goles en contra, cuáles son las posibilidades matemáticas de clasificar a octavos de final, o a cuartos de final que tenga un país, en fin, una cantidad de aspectos del campeonato, del cual todos los aficionados estarán pendientes. Por cierto, ¿por qué se habla de octavos y cuartos de final? Recuerden que participan 64 equipos y vean de qué manera van clasificando para responder la pregunta planteada.

Unas palabras sobre los problemas. Hemos tenido el cuidado de presentarlos en orden creciente de dificultad, aunque eso siempre tendrá sus detractores, pues lo que resulta fácil para algunas personas, puede ser difícil para otras. Los seis primeros meses son dedicados a problemas de la Olimpiada Recreativa de Matemáticas. El lector podrá ver en ambas esquinas superiores las letras ORM, para indicar esta competencia. En el segundo semestre del año cada página se identifica con las siglas OJM, para indicar que los problemas corresponden a la Olimpiada Juvenil de Matemáticas. Para continuar con el tema de este año, en los días de fiesta venezolanos, hemos incluido elementos de interés sobre la historia del fútbol y las copas del mundo. Adicionalmente, se encuentran las fechas de los eventos del Programa de Olimpiadas Matemáticas y de las olimpiadas internacionales a las que asistimos durante el año.

Este año quisieramos aprovechar este espacio para hablar un poco de nuestros colaboradores, quienes desinteresadamente nos entregan buenos artículos para enriquecer el Calendario Matemático. Contamos con la colaboración de 10 matemáticos con artículos de temas variados en álgebra, teoría de números y geometría que profundizan temas aprendidos en la escuela, y del Dr Héctor Vielma, biólogo, profesor de la UPEL-IPC, quién nos deleita con un interesante y divertido artículo sobre matemáticas y fútbol.

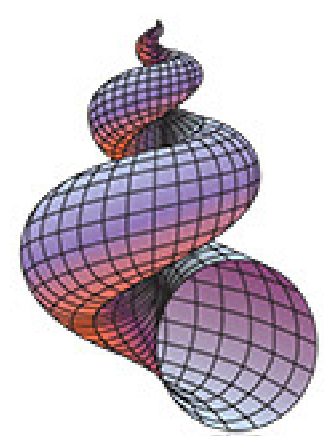
En el área de álgebra, José Nieto nos presenta una ecuación diofántica que se presenta con frecuencia en olimpiadas matemáticas. En teoría de números, Lisandro Alvarado justifica el algoritmo para hallar fracciones generatrices de las expresiones decimales periódicas y Douglas Jiménez discute sobre los números triangulares.

Fabiola Czwienczek, en el área de Geometría, nos enseña un recurso para la enseñanza de la misma, el Stomachion, un rompecabezas menos conocido que el Tangram. Sobre construcciones geométricas, tenemos los artículos de Ignacio Iribarren y Bernardo González. El primero nos cuenta sobre los polígonos que se pueden construir con regla y compás y el segundo trata del polígono de 17 lados, específicamente. Por otro lado, José Alberto Infante relaciona la geometría con el álgebra y Luís Fernando Cáceres y César Augusto Barreto justifican con construcciones geométricas sencillas las identidades del seno y coseno de la suma de dos ángulos.

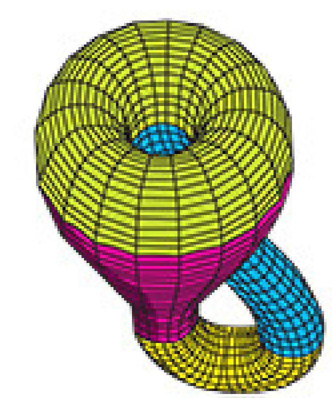
Finalmente, no podíamos dejar de lado las olimpiadas matemáticas. Por ello, Oscar Bernal y Francisco Bellot nos muestran un grupo de problemas olímpicos con soluciones creativas.

Para mayor información sobre las Olimpiadas Matemáticas puede visitar nuestros sitios de internet, www.acm.ciens.ucv.ve y www.olimpiadarecreativa.com.

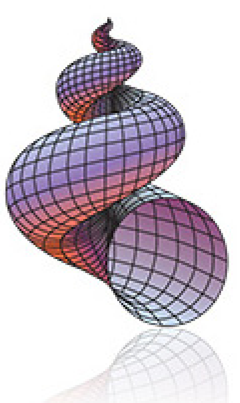
Rafael Sánchez Lamoneda
Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
Universidad Central de Venezuela



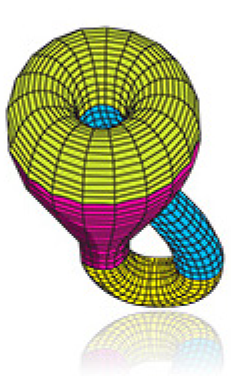
OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2014



Índice



OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2014



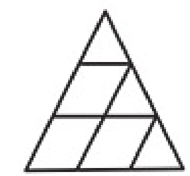
ORM

ENERO 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes

1 (Miércoles) Carla lanzó un dado 3 veces y obtuvo 15 puntos en total. Si obtuvo siempre una cantidad diferente, ¿cuánto obtuvo en cada lanzamiento?

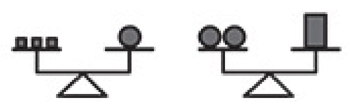
2 (Jueves) ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



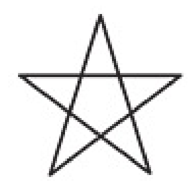
3 (Viernes) ¿Cuántas unidades tiene la suma de 9 centenas, 10 decenas y 11 unidades?

6 (Lunes)

7 (Martes) De acuerdo a la información que muestra la figura, ¿cuántos cuadrados pequeños pesan igual que el rectángulo grande?



8 (Miércoles) ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



9 (Jueves) ¿Cómo representas numéricamente dos mil catorce milésimas?

10 (Viernes) Verónica quiere escribir

MATEMÁTICA

usando colores diferentes para letras diferentes, ¿cuántos colores necesita?

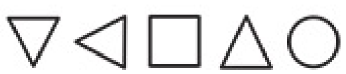
13 (Lunes) Un día, el señor Vicente tenía en su tienda 24 morrales y trajo de su depósito 33 más. Si al final de ese día vendió 41 morrales, ¿cuántos morrales le quedaron en su tienda?

14 (Martes) Paola prestó $\frac{2}{3}$ de los libros que tenía. ¿Cuántos libros tenía si le quedaron 21 libros?

15 (Miércoles) Feliz día del Maestro

16 (Jueves) Zoraida se da cuenta de que si agrupa de 3 en 3 los caramelos que tiene en una bolsa forma 2 grupos más que cuando los agrupa de 4 en 4. ¿Cuántos caramelos tiene Zoraida?

17 (Viernes) Angelina repitió siete veces la siguiente secuencia:



¿Cuántas figuras no son triángulos en toda la secuencia creada por Angelina?

20 (Lunes) Si a 38 centenas le aumentamos 20 decenas, ¿cuántas unidades de mil obtenemos?

21 (Martes) Ramiro vive a 7 cuadras de su escuela. ¿Cuántas cuadras recorrerá en 12 días para ir a la escuela y luego regresar a su casa?

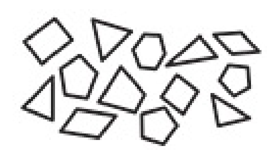
22 (Miércoles) Anita es 15 cm más alta que Luisa. Luisa es 2 cm más baja que Inés. Si Inés tiene 142 cm de estatura, ¿cuál es la estatura de Anita, en centímetros?

23 (Jueves) De la siguiente lista de números:

14	784	74	107	348
469	225	891	1000	540

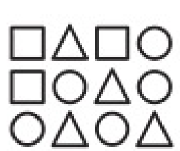
¿cuántos tienen más de 35 decenas completas?

24 (Viernes) ¿Qué fracción del total de los polígonos representa a los que tienen más de cuatro lados?



27 (Lunes) Lucía vive en una calle donde las casas están numeradas del 1 al 28. ¿Cuántas veces aparece el 2 en los números de las casas?

28 (Martes) ¿Cuál de las siguientes figuras representa un tercio de las figuras que aparecen en el dibujo?



29 (Miércoles) El peso del agua en el cuerpo de la medusa representa las $\frac{9}{10}$ partes del peso total. ¿Qué tanto por ciento representa?

30 (Jueves) El cuerpo humano está compuesto por unas $\frac{3}{5}$ partes de agua. Si Ana pesa 50 kg, ¿cuál es el porcentaje de agua de su cuerpo?

31 (Viernes) En la palabra

MATEMÁTICA

¿qué tanto por ciento aparece la M?

Stomachion: Un Recurso para la Enseñanza de la Geometría

El Stomachion es un rompecabezas que, al igual que el Tangram, se obtiene de la disección de un cuadrado. Consta de 14 piezas: 11 triángulos, 2 cuadriláteros y un pentágono. Se construye fácilmente siguiendo el patrón que se muestra en la figura 1. Observe que los vértices de todas las piezas son puntos de la cuadrícula. Este rompecabezas se denomina también Cuadrado de Arquímedes, matemático al cual se atribuye su creación. Las propiedades de sus piezas lo convierten en un excelente recurso para realizar interesantes actividades en nuestras clases de matemática; actividades que involucran no sólo conceptos geométricos, sino también aritméticos. Lo explicaremos brevemente.

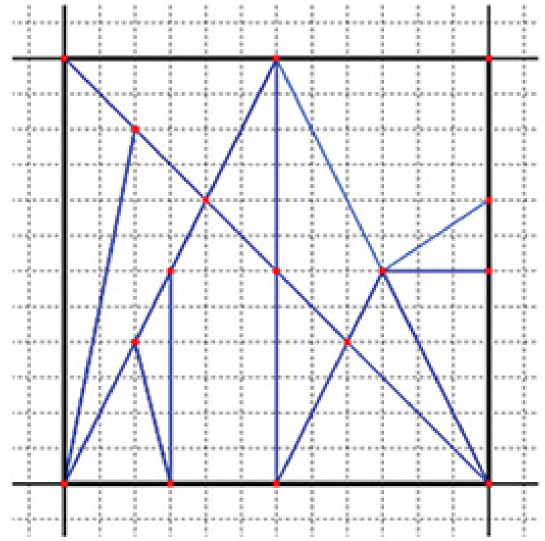
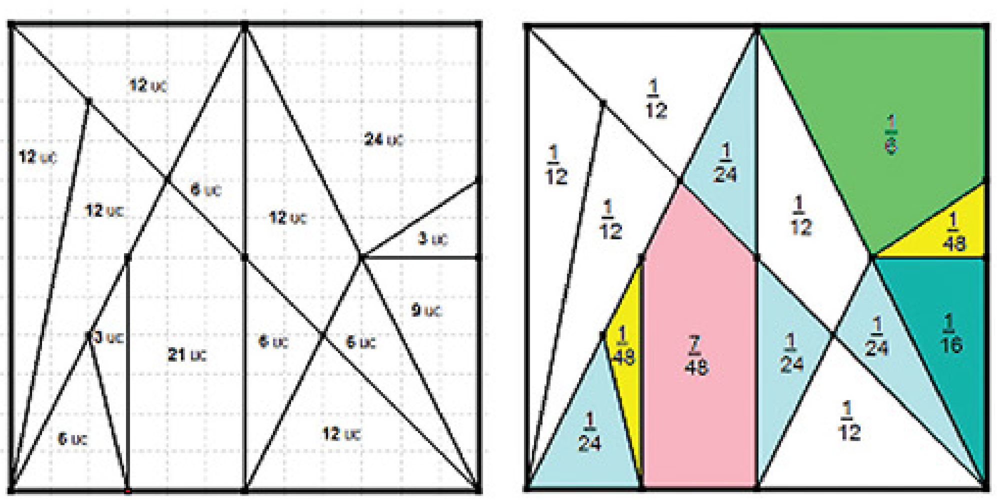


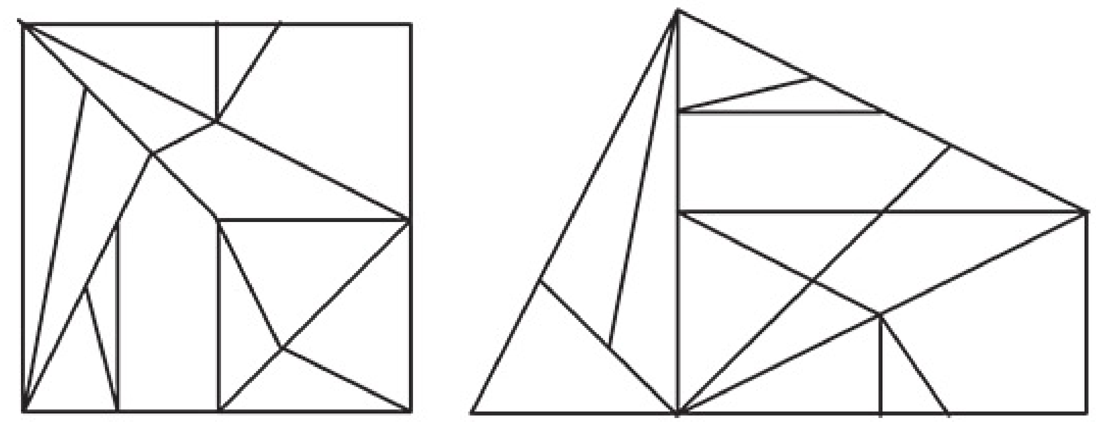
Figura 1

La primera actividad es la construcción del rompecabezas por parte del estudiante. Una vez construido el Stomachion y, tomando como unidad de medida de área la del cuadrado que forma la cuadrícula, podemos proceder a calcular el área de cada uno de sus componentes. Notaremos que estas áreas son números enteros y, además, todos son múltiplos de 3. En la figura 2 mostramos el rompecabezas indicando en cada una de las piezas su área correspondiente (uc significa unidades cuadradas). Teniendo en cuenta que el área del cuadrado inicial es 144 uc, lo siguiente es determinar qué fracción del área total representa el área de cada pieza. En la figura 3 hemos coloreado del mismo color aquellas partes que representan la misma fracción. También es interesante realizar la clasificación de los triángulos, según sus lados y sus ángulos. Y si nuestros estudiantes ya conocen el teorema de Pitágoras, podemos proponerles el cálculo del perímetro de cada uno de los polígonos que conforman el Stomachion.



Figuras 2 y 3

Como se trata de un rompecabezas, una actividad que no puede dejarse de lado es la formación de figuras. Una de ellas es la composición del cuadrado original, pero reordenando las piezas en posiciones distintas a las que ocupaban inicialmente (en la figura 4 se muestra una de las 536 soluciones que existen). También se forman trapecios con un ángulo recto (figura 5), triángulos rectángulos (figura 6) y muchas otras figuras más.



Figuras 4 y 5

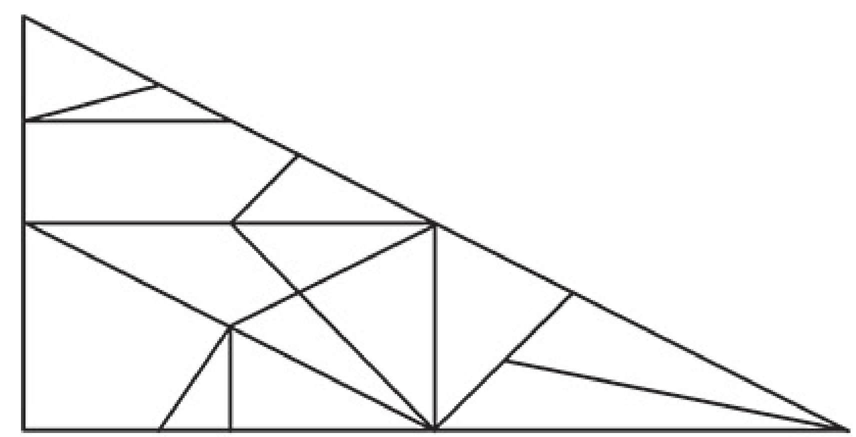


Figura 6

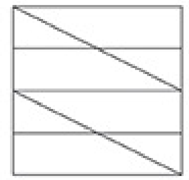
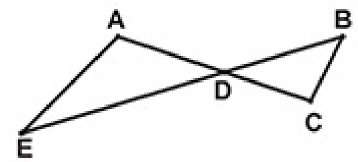
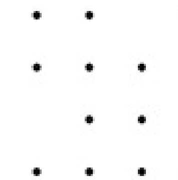
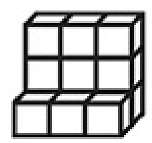
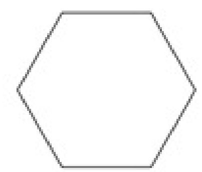
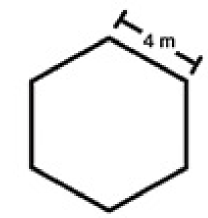
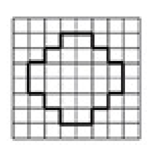
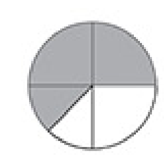
Recomendamos visitar:

http://www.ugr.es/~anillos/verano2009/03seccion.pdf
http://revistasuma.es/IMG/pdf/50/079-084.pdf

Fabiola Czwienczek Miler
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico de Maracay

ORM

FEBRERO 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 Jesús tiene 20 cajas, en cada caja hay 14 carritos y cada carrito tiene 4 ruedas. ¿Cuántas ruedas contará Jesús en total?	**4** ¿Cuántos triángulos hay en la figura? 	**5** ¿Cuántos segmentos hay en la figura de modo que sus extremos sean dos de los puntos A, B, C, D o E? 	**6** Si Gabriela nació el 31 de diciembre de 2013, ¿en qué día de la semana cumplirá 7 años?	**7** ¿Cuántos cuadrados puedes dibujar cuyos vértices sean puntos de la imagen? 
10 Ana, Braulio, Celia y David ganan los primeros cuatro lugares en una Olimpíada de Matemática. La suma de los números de los lugares ganados por Ana, Braulio y David es 6. Se obtiene lo mismo al sumar los lugares ganados por Braulio y Celia. Si Braulio llegó primero que Ana, ¿quién ganó la competencia?	**11** José tiene 12 cubos iguales cuyas caras son blancas, con ellos forma un sólido como se muestra en la figura y pinta de color azul todas las caras externas del nuevo sólido. Si luego desarma el sólido, ¿cuántas caras blancas quedaron? 	**12** ¿Cuál es el mayor número de diagonales que puedes dibujar en un hexágono regular de manera que no se corten dos o más de ellas? 	**13** En un examen de Matemática, Roberto obtuvo menos nota que Francisco, Elena obtuvo más que Andrea, pero menos que Roberto, ¿quién obtuvo la mayor nota?	**14** ¿Cuántos metros de alambre se deben comprar para cercar un terreno como muestra la figura, donde todos sus lados son iguales y además el alambre tiene que dar 3 vueltas al terreno? 
17 Carlos nació 4 años después que Patricia, pero 7 años antes que Raquel. Si Raquel tiene 13 años, ¿cuántos años tiene Patricia?	**18** La figura muestra un piso formado por cerámicas cuadradas de lado 7 cm. Una hormiga recorre la ruta marcada con la línea gruesa. Si da cinco vueltas, ¿cuántos centímetros recorre? 	**19** Observa las siguientes secuencias numéricas: $12, 22, 32, 42, 52, 62, \dots$ $31, 62, 93, 124, 155, \dots$ Ambas secuencias tienen números en común. Después del 62, ¿cuál es el siguiente número en común?	**20** Luisa colgó un globo en el poste de luz que se encuentra cada 2 metros en ambos lados del camino hasta su casa. ¿Cuál es la distancia total del camino si ella logró colocar un total de 40 globos? 	**21** Se tienen tres rollos de tela, cuyas longitudes son 240, 360 y 420 metros, respectivamente. Se desea obtener rollos pequeños, todos de igual longitud y con un número entero de metros. ¿Cuál es el menor número de rollos que se puede obtener con esa condición?
24 ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 personas en 4 asientos?	**25** ¿En cuántas unidades aumenta o disminuye el número 463, si se intercambia la cifra de las centenas con la cifra de las decenas?	**26** Marlene tiene triángulos y cuadrados de cartulina. Si en total sus piezas tienen 17 vértices, ¿cuántos triángulos y cuántos cuadrados tiene Marlene?	**27** ¿Cuántos segundos hay en la mitad de la tercera parte de un cuarto de hora?	**28** Luisa vende, de una torta, lo representado en la parte sombreada del círculo. ¿Qué porcentaje le queda por vender? 

Expresiones Decimales Periódicas

Cuando presentamos a nuestros alumnos los conjuntos numéricos tradicionales, se nos hace fácil lograr que ellos visualicen los naturales y los enteros a pesar de su infinitud y gracias a algunas propiedades de dichos conjuntos (orden, numerabilidad, densidad), es decir, un niño de 12 años entiende fácilmente el significado de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, pero cuando queremos hablar del conjunto de los números racionales, se nos presenta un problema como consecuencia de su densidad (entre dos números racionales siempre podemos hallar otro número racional) y nos vemos obligados a expresarlo por comprensión y no por extensión como en los casos anteriores. Usamos expresiones como: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z} \quad y \quad b \in \mathbb{Z}^*\}$ o bien $\mathbb{Q}$ es el conjunto formado por todos los números decimales periódicos.

Que estas expresiones correspondan al mismo conjunto nos obliga, en primer año, a mostrar una correspondencia entre los elementos de uno y los elementos del otro. En este caso decimos que si $\frac{a}{b}$ es una fracción positiva se puede asociar con el número decimal periódico que se obtiene al dividir a entre b. Esta, que llamamos "*expresión decimal de la fracción*", sabemos que es periódica porque los posibles restos que tiene la división deben ser no negativos y menores que b por tanto a lo sumo en b pasos tiene que repetirse alguno de ellos y al repetirse uno se repiten los subsiguientes restos cíclicamente.

En el otro sentido, para hallar la fracción equivalente a una expresión decimal, se suele separar en tres casos:

1. Para los decimales limitados (aquellos que aparentemente no tienen período) la fracción generatriz tendrá como numerador al número decimal sin la coma y como denominador a un uno seguido de tantos ceros como dígitos tenga la parte decimal.

2. Para los decimales periódicos puros (cuando el período está inmediatamente después de la coma), el numerador es el decimal sin la coma menos la parte entera y el denominador tantos 9 como dígitos tenga el período.

3. Para los decimales periódicos mixtos (entre la coma y el período hay uno o varios dígitos), el numerador es el número sin la coma menos la parte numérica que no se repite y el denominador, tantos 9 como dígitos tenga el período seguido de tantos 0 como dígitos tenga el anteperíodo.

En tercer año como introducción a los números irracionales se vuelve a tocar el tema, pero a estas alturas (el joven debe tener entre 14 y 15 años), es necesario justificar al alumno esos algoritmos de primer año para hallar la fracción generatriz, la idea es suponer que el decimal es una fracción y luego multiplicar adecuadamente por potencias de 10, por ejemplo:

- Si $a = 2,34$ (decimal limitado) suponemos que es una fracción y escribimos $2,34 = f$, multiplicamos la igualdad por 100 y luego despejamos la f, esto es

$$100 \times 2,34 = 100f; \quad 234 = 100f \quad \text{y de allí,} \quad f = \frac{234}{100}.$$

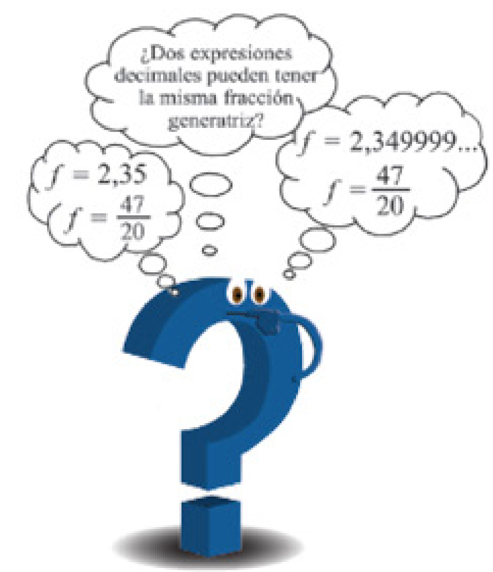
o cualquier otra fracción equivalente a esta ($\frac{117}{50}$ es la irreducible).

- Si $b = 5,\overline{289}$ escribimos $5,\overline{289} = f$, multiplicamos por mil, $1000 \times 5,\overline{289} = 1000f$, es decir $5289,\overline{289} = 1000f$ y restando la igualdad inicial tenemos: $5289,\overline{289} - 5,\overline{289} = 1000f - f$, como las partes decimales son exactamente iguales se cancelan y así obtenemos que $5284 = 999f$ y de allí $f = \dfrac{5284}{999}$.

- Finalmente para un decimal periódico mixto como por ejemplo $c = 5,2\overline{89}$ escribimos $5,2\overline{89} = f$, luego multiplicamos por 10 para hallar un decimal periódico puro $52,\overline{89} = 10f$ y esta última igualdad la multiplicamos por 100 para obtener $5289,\overline{89} = 1000f$ de allí $5289,\overline{89} - 52,\overline{89} = 1000f - 10f$; es decir que, $5237 = 990f$, de donde, $f = \dfrac{5237}{990}$.

Estos últimos algoritmos fundamentan lo que se había dicho en primer año como una receta.

Ahora bien, como ejercicio nos podemos plantear las siguientes preguntas: ¿podemos escribir las expresiones decimales limitadas como expresiones decimales periódicas? Y en caso afirmativo ¿es única esta expresión? La respuesta a la primera pregunta es obviamente que sí, pues todos sabemos que el período 0 no afecta al decimal limitado, es decir: $2,35 = 2,350 = 2,3500 = 2,35\overline{0}$ pero la segunda respuesta puede sorprender a algunas personas ya que esta no es la única forma de escribir un decimal limitado como decimal periódico ya que $2,35$ también es igual a $2,34\overline{9}$ hemos escuchado decir que esto no es una igualdad sino una aproximación, pero veamos cuales son las fracciones generatrices de ambos decimales.



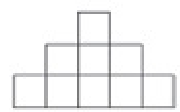
- En el primer caso $2,35 = f$ implica que $235 = 100f$ y de allí $f = \dfrac{235}{100} = \dfrac{47}{20}$.

- En el segundo caso de $2,34\overline{9} = f$ obtenemos $234,\overline{9} = 100f$ y también que $2349,\overline{9} = 1000f$ de donde: $2349,\overline{9} - 234,\overline{9} = 1000f - 100f$; es decir que, $900f = 2115$ y de allí $f = \dfrac{2115}{900} = \dfrac{47}{20}$.

Como puede verse las dos expresiones decimales tienen la misma fracción generatriz, por lo tanto representan al mismo número racional. No es que una de ellas sea aproximadamente igual a la otra, es que son exactamente iguales. Cosas de la matemática.

Lisandro Alvarado
Colegio Los Hipocampitos - Grupo Sumatoria

MARZO 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 La competición de fútbol más antigua del mundo es la FA Cup inglesa fundada por C.W. Alcock en 1872. 	**4** La pelota de cuero fue inventada por los chinos en el siglo IV a. C. 	**5** ¿Cuánto es la mitad del 50 % de 2014?	**6** Gabriela tiene 2014 piezas cuadradas del mismo tamaño, y las coloca todas de modo de formar un rectángulo, ¿cuántos rectángulos diferentes puede obtener?	**7** Rosa, Inés, Carmen, Pablo, Andrés y Julián se sientan en círculo de tal manera que frente a un hombre hay una mujer y entre dos mujeres hay un hombre. Pablo tiene a su derecha a Rosa. Si frente a Andrés está Carmen, ¿quién está justo a la izquierda de Julián?
10 El producto de cuatro números naturales diferentes es 36. ¿Cuál es su suma?	**11** Una pieza de cerámica está formada por piezas cuadradas de área 16 cm^2, cada una, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el perímetro de la pieza? 	**12** Entre Mariela y Rafael tienen Bs. 2500. Si Mariela tiene Bs. 250 más que Rafael, ¿cuánto tiene Rafael?	**13** ¿Cuál cantidad es mayor, el 35 % de 65 o el 65 % de 35?	**14** ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener con la multiplicación de dos números diferentes entre 1 y 5, ambos inclusive?
17 Si el producto de dos números es 2014 y la suma de ambos números es la menor posible, ¿cuáles son esos números?	**18** Si a cierto número se le agrega una cifra dos a la derecha, aumenta en 74 unidades, ¿cuál es ese número?	**19** 	**20** Canguro Matemático 2014 ORM y OJM	**21** Escribe tu edad, súmala a la edad que tendrás dentro de un año. Luego, suma 7, divide entre 2 y resta la edad que tienes ahora. ¿Cuál es tu resultado?
24 Luisa tiene Bs. 100 para comprar galletas de Bs. 16 o Bs. 12. Si quiere comprar la mayor cantidad de galletas posibles gastando todo el dinero, ¿Cuántas galletas compra?	**25** Doña Lupe fue a la tienda a comprar 3 litros de crema que le hacían falta para preparar un pedido de pasteles, pero en la tienda sólo encontró tarros de crema de $\frac{1}{6}$ de litro. ¿Cuántos tarros de crema debe comprar Doña Lupe?	**26** Débora debe repartir $2\frac{3}{4}$ kilos de chocolate en bolsas de $\frac{1}{8}$ de kilo. ¿Cuántas bolsas puede llenar?	**27** José recoge 2014 mangos y los quiere colocar en cajas que contienen un máximo de 8 mangos. Si queremos utilizar el menor número de cajas, ¿cuántas cajas se necesitarán para guardar todos los mangos?	**28** Antonio compró 17 bolígrafos, 13 portaminas y 9 lápices. El costo de un bolígrafo es el triple del costo de un lápiz. El costo de un lápiz es la mitad del costo de un portaminas. ¿Cuántos lápices pudo haber comprado Antonio con la misma cantidad de dinero?
31 ¿Cuántos divisores comunes tienen los números 252 y 180?				

Regla y Compás

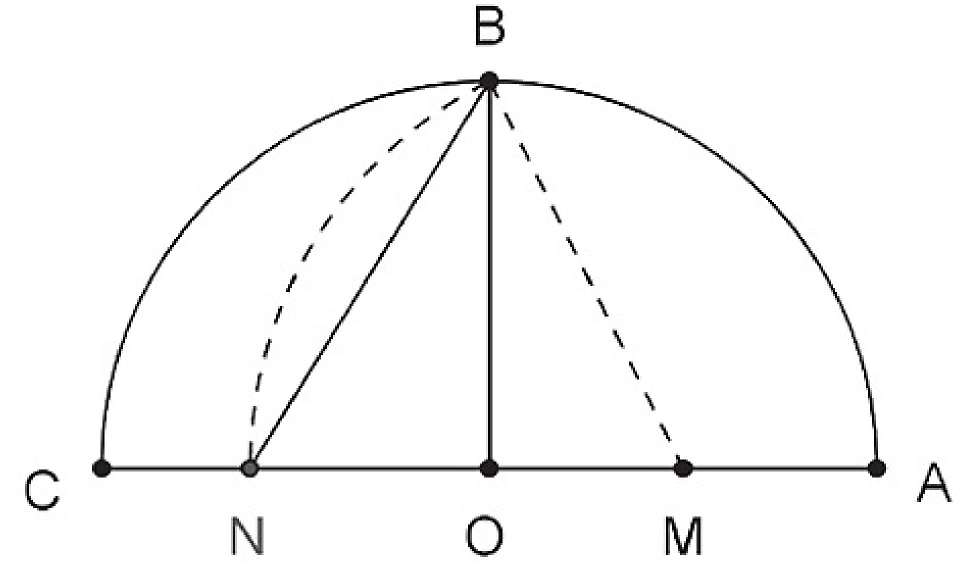
La geometría en la antigua Grecia imponía como requisito de perfección y de certeza que una construcción geométrica debía hacerse con regla y compás. La regla sólo podía servir para trazar líneas rectas y no debía tener marca alguna, mucho menos utilizarse para medir distancias. Puntos en el plano sólo se fijan por intersecciones de dos rectas, de una recta y una circunferencia, y por dos circunferencias.
Por siglos, la exigencia de regla y compás ha suscitado enormes desafíos matemáticos que han tardado en resolverse. Acaso los más famosos surgieron durante la época griega clásica:

1. *La trisección del ángulo.* Un ángulo cualquiera puede bisectarse con regla y compás fácilmente, el problema es dividirlo en tres. Esto puede hacerse con muchos ángulos particulares ($90^0, 36^0, \ldots$), la gracia es hacerlo con uno cuaquiera.

2. *La duplicación del cubo.* Tomemos un cubo cuya arista (lado) es la unidad de medida 1. Se trata de construir (regla y compás) la arista de un cubo de volumen doble. Es decir, de volumen $2 \times 1^3 = 2$, de modo que su lado ha de ser $\sqrt[3]{2}$.

3. *La cuadratura del círculo.* Dado un círculo, se propone construir (regla y compás) un cuadrado de la misma área.

Estos problemas mantuvieron su secreto por más de mil ochocientos años. Hubo innumerables intentos y falsas expectativas. En la segunda mitad del siglo XIX y con el auxilio de conocimientos algebraicos antes desconocidos, se demostró la imposibilidad de la trisección del ángulo, de la duplicación del cubo y de la cuadratura el círculo con regla y compás.
Veamos otro caso de igual antigüedad. Se trata de construir polígonos regulares (lados de igual longitud) empleando sólo regla y compás. El punto de partida es una circunferencia dada y se le inscriben los polígonos.
Un cuadrado no ofrece dificultad: se trazan dos diámetros perpendiculares y se unen sus extremos. Para un hexágono, el lector puede ver que si se unen dos vértices contiguos con el centro se obtiene un triángulo equilátero, o sea que el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia; esta es la construcción más sencilla. Uniendo los vértices alternos del hexágono obtenemos un triángulo regular inscrito.
Una vez construido un polígono regular, es bastante obvio el cómo duplicar sus lados. O sea que, si sabemos construir el de m lados, también podemos con el de $2^n \times m$ lados. Así pues, con regla y compás podemos inscribir polígonos de $12 = 2 \times 6$, $64 = 2^4 \times 4$, ... lados.
El pentágono regular es el primero que exige cierto ingenio en su construcción. He aquí un método (ver figura): Sea CA un diámetro de una circunferencia; por el centro O se erige una perpendicular que corta la circunferencia en B; con centro el punto medio M del segmento OA y radio MB se intersecta el diámetro CA en el punto N, es decir, $MN = MB$. Entonces, el segmento NB es igual a un lado del pentágono inscrito, y por cierto ON es igual al lado del decágono.



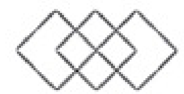
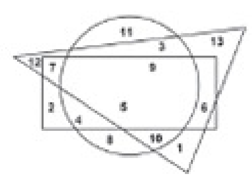
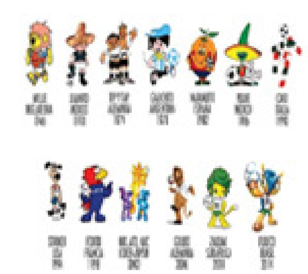
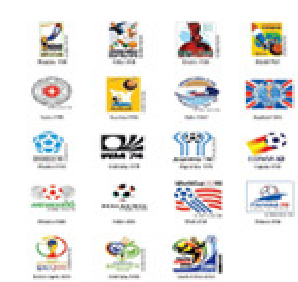
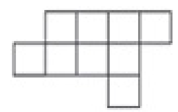
Euclides mostró que el polígono de 15 lados se obtiene fácilmente del pentágono y el triángulo inscritos en la misma circunferencia y con un vértice en común.
Aquí cabe plantearse el caso general: ¿Qué polígonos regulares se pueden construir con regla y compás?
Esta pregunta fue definitivamente respondida por el gran Gauss a los 21 años de edad en su obra *Disquisitiones Arithmeticae* (1798).
Su teorema expresa que un polígono regular puede construirse con regla y compás si, y sólo si, su número m de lados es de la forma

$$m = 2^k \times p_1 \times p_2 \cdots \times p_n \qquad (\mathcal{G})$$

donde $k \geq 0$ y los p son números primos (distintos uno de otro) de la especie $p = 2^r + 1$. Estos se han llamado *primos de Fermat*. El propio Pierre de Fermat (s. XVII) observó que comienzan por $3, 5, 17, 257, 65537$ (que corresponden a $r = 1, 2, 4, 8, 16$). Hasta hoy no se han encontrado otros, aunque Fermat pensó que serían infinitos.
Se infiere, por ejemplo, que polígonos regulares de $7, 9, 11, 13, 14$ lados no se pueden construir con regla y compás. Los griegos no pasaron de la construcción ortodoxa de los de $3, 4, 5$ y 15 lados y desde luego sus múltiplos de 2. Gauss logró construir el de 17 lados a sus 19 años.
Este es el número de lados (< 300) de polígonos regulares que pueden construirse con regla y compás:
$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80,$
$85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272$
El lector puede comprobar que estos números son los que satisfacen la condición $(\mathcal{G})$.

Ignacio L. Iribarren
Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales
y Universidad Simón Bolívar

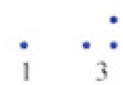
ABRIL 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 Sebastián divide en partes a una vara realizando 7 cortes y a cada parte obtenida le realiza 8 cortes. ¿En cuántas partes quedó dividida la vara?	**2** Luis construye cuadrados utilizando 24 palillos iguales. ¿Cuántos cuadrados construyó? 	**3** En la secuencia ♣♢♡♠♣♢♡♠♣♢♠ · · · ¿Cuál figura ocupa la posición 2014?	**4** El cuerpo humano está compuesto por unas $\frac{3}{5}$ partes de agua. Si Ana pesa 50 kg, ¿Cuál es el peso de agua de su cuerpo?
7 Un recipiente contiene $5\frac{1}{4}$ litros de pintura con los cuales se deben llenar latas de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántas latas se podrán llenar?	**8** ¿Cuál es la suma de los números que se encuentran dentro de solo dos regiones en la figura? 	**9** Si una camisa lleva 7 botones y se tiene una bolsa con 12 docenas de botones, ¿cuántas camisas se pueden confeccionar y cuántos botones sobrarían?	**10** La suma de dos fracciones es $\frac{11}{15}$, ¿cuál es el mayor de los sumandos si los denominadores son los más pequeños posibles?	**11** ¿Cúantos dígitos utilizas para escribir la secuencia numérica del 1 al 100?
14 La primera edición de la Copa del Mundo de fútbol fue en Uruguay en 1930. 	**15** En el mundial de Suiza 1954 se incorporan los números en la espalda a las camisetas de los fut- 	**16** Las transmisiones de televisión directo a todo el planeta llegaron en México 1970. 	**17** Las mascotas de los mundiales 	**18** Los mundiales 
21 En la suma N y P representan dígitos diferentes, ¿cuánto es la suma $N+P$? $\begin{array}{rrr} 3 & N & P \\ + & N & P \\ \hline 4 & 7 & 0 \end{array}$	**22** ¿Cuál es la mayor cantidad de cuadrados que puedes quitar de la figura para obtener un polígono que tenga el mismo perímetro? 	**23** Carmen salió de su casa con dinero en el bolsillo. Gastó $\frac{5}{6}$ y le quedaron Bs. 70. ¿Con cuánto dinero salió de su casa?	**24** Se necesitan $3\frac{1}{4}$ naranjas para obtener un vaso de jugo. ¿Cuántas naranjas se necesitarían para obtener 12 vasos de jugo?	**25** En una empresa hay 185 personas y de cada 10 personas, 6 son hombres. ¿Cuántas mujeres hay en la empresa?
28 Valentina eligió un número que dividió entre 19, al resultado le sumó 19 y a esa suma la multiplicó por 19. Al final, obtuvo el número 2014. ¿Qué número eligió al inicio?	**30** En un grupo de danza hay 26 varones y 14 hembras. Cada semana se unen al grupo 1 varón y 3 hembras. ¿Después de cuántas semanas el número de hembras y el de varones es igual en el grupo?	**30** Un día, en una clase de danza en la que se habían inscrito 30 personas, la quinta parte del número de alumnos asistentes era igual al número de alumnos inasistentes. ¿Cuántas personas no asistieron a la clase de ese día?		

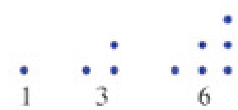
Triángulos y Números

¿Quieres saber cómo se forman triángulos a partir de un punto? Pues: añadiendo un punto adicional a la cantidad de puntos que añadiste la última vez. ¿Trabalenguas? ¿Adivinanza?... De ninguna manera. Observa: primero tienes un punto:

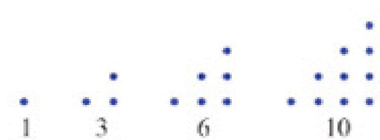
Con uno más tendrías dos, ¿no?. Pues, añade los dos:



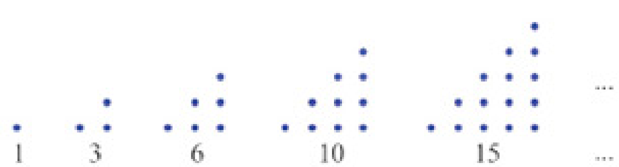
¿Ves que tienes un primer triángulo? ¡Con tres puntos! Como añadiste dos la última vez, uno más sería tres. Añade los tres:



¡Ajá! Aumentaste de tamaño el triángulo y tienes seis puntos. ¡Ya te diste cuenta: la próxima vez vas a añadir cuatro!

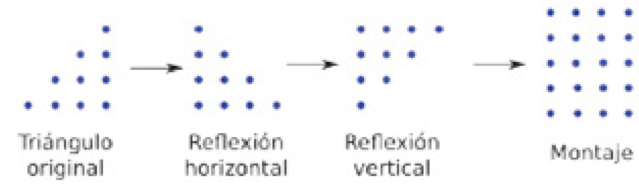


con lo que tienes un triángulo más grande de diez puntos. De aquí en adelante es fácil continuar:



A cada número de la secuencia anterior lo llamaremos, naturalmente, *número triangular*. Como suele suceder, surgen las preguntas: ¿cuántos puntos tiene el próximo triángulo?, ¿cuantos puntos tiene el triángulo en la posición 50?, ¿puedo obtener una fórmula general?

Cinco siglos antes de Cristo ya los pitagóricos tenían la respuesta, pero la forma en que la obtuvieron fue sencillamente deliciosa y, además, muestra que la concepción griega de la matemática era esencialmente geométrica. Tomemos un triángulo cualquiera de la sucesión, le aplicamos primero una reflexión horizontal y luego una vertical. Nos queda un triángulo igual pero en posición invertida respecto al primero. Finalmente montamos el último triángulo encima del primero, como muestra esta figura:



El resultado final es un rectángulo... ¡pero no cualquier rectángulo! Resulta ser uno que tiene la misma base que el triángulo original, pero su altura es una unidad mayor. Así, si el triángulo original tenía n puntos de base, el rectángulo tendrá los mismos n puntos de base, pero $n+1$ puntos de altura. De forma tal que el el rectángulo está constituido por $n(n+1)$ puntos y como se formó con dos triángulos iguales entonces T_n, el n–ésimo número triangular, viene a ser

$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Es decir, la pregunta sobre el número de puntos del triángulo en la posición 50 tiene como respuesta

$$T_{50} = \frac{1}{2}50 \cdot 51 = 1275.$$

Como de seguro habrás notado, la igualdad de los números triangulares se puede escribir como:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Los números triangulares forman parte de la solución de muchos problemas matemáticos. Te planteo algunos:

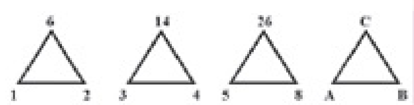
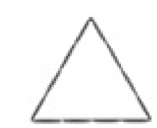
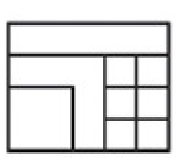
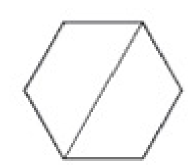
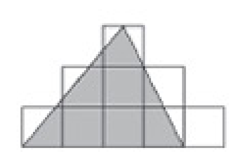
- ¿Cuál es el resultado de sumar todos los números enteros entre 824 y 1323?
- En Cuba se juega un dominó que llega hasta el doble nueve, ¿cuántas piedras tiene este dominó?
- En una reunión habían 101 personas y todas se dieron la mano entre sí, pero una sola vez. ¿Cuántos apretones de mano hubo?
- ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de 25 lados?

Por cierto, ¿podrías pensar en un argumento de tipo pitagórico para justificar la siguiente igualdad?

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Douglas Jiménez
UNEXPO

MAYO 2014

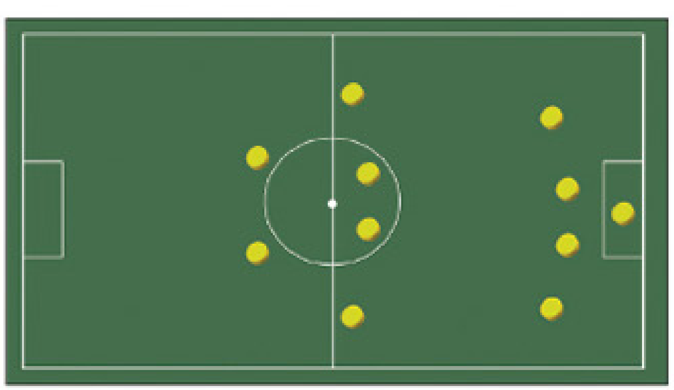
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			1 El equipo con el nombre más largo, juega en Gales y se trata de Llanfairpwllgwyngyllgogerychwyrndrobwllllantysiliogogogoh.	**2** OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2014 Final Regional OJM Sábado, 3 de mayo de 2014
5 Amalia, Beatriz, Carla, Daniela y Emilia se sientan en una banca de cinco asientos. Si sabemos que Carla se sienta en un extremo junto a Daniela y que Emilia se sienta junto a Beatriz pero está lo más lejos posible de Daniela, ¿quién está sentada en el asiento central?	**6** En un depósito se encuentran 6 cajas llenas con la misma cantidad de limones cada una. Si de éstas se saca un total de 56 limones en mal estado y con los limones que quedan se llenan 5 cajas de las anteriores y sobran 14 limones, ¿cuántos limones habían inicialmente en cada caja?	**7** Entre Pedro y José tienen 30 metras, Luis tiene varias metras y se junta para jugar con Antonio que tiene 5 metras. Al finalizar el juego, Luis y Antonio han perdido la quinta parte de sus metras. Si Pedro y José tienen ahora 34 metras, ¿cuántas metras tenía Luis inicialmente?	**8** Cuando dos niños estrechan sus manos para saludarse, contaremos eso como un “choque de manos”. Cada niño en un salón choca las manos con los demás niños en el salón exactamente una vez. Si hubo 28 choques de manos, ¿cuántos niños había en el salón?	**9** Jorge tiene una garrafa de 8 litros llena de limonada y dos envases vacíos: uno de 5 litros y otro de 3 litros. ¿Cuál es la menor cantidad de transferencias de limonada que debe hacer para lograr tener dos partes iguales de limonada?
12 Siguiendo el patrón ¿qué números van, respectivamente, en los vértices **A, B, C** del triángulo de la derecha? 	**13** ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor divisor de 2014?	**14** Un par de zapatos cuesta Bs. 285. Elena fue a comprarlos en una tienda que tiene 25 % de descuento. Al pagar le cobran 12 % de IVA. ¿Cuál es el precio final, incluyendo impuesto?	**15** OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2014 Final Regional ORM Jueves, 15 de mayo de 2014	**16** Lorena construye con 12 palitos un triángulo equilátero, ¿cuáles otros polígonos regulares puede construir si usa la misma cantidad de palitos? 
19 ¿Cuántos rectángulos hay en la figura? 	**20** Rafael tiene cierta cantidad de caramelos y se da cuenta que si duplica esa cantidad tendría más de 28 caramelos, mientras que si la triplica y le suma uno tendría menos de 49 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Rafael?	**21** En la siguiente secuencia, $5-1; 8-2; 11-3; 14-4; 17-5; 20-6; \ldots$ ¿Cuál es la diferencia entre el vigésimo y el octavo término de la secuencia?	**22** Si el hexágono regular de la figura tiene perímetro 18 cm, ¿cuánto mide la diagonal? 	**23** ¿Cuántas decenas completas hay en 2014 unidades?
26 El ratón Pérez le deja a Pedro Bs. 50 por cada diente que se le cae. Si el número de dientes que se le han caído a Pedro menos su edad es 1 y el ratón Pérez le ha dejado en total Bs. 550, ¿cuántos años tiene Pedro?	**27** ¿Cuál es la menor cantidad que se le debe sumar a 2014 para obtener un número con todas sus cifras diferentes de 2?	**28** Si los cuadrados son de lado 1 cm, ¿cuál es el área del triángulo sombreado? 	**29** ¿Cuántos números, diferentes, de tres cifras puedes escribir usando sólo el 5 y el 0?	**30** ¿Cuántas fracciones propias e irreducibles, cuyo denominador sea 36, existen?

La Matemática y el Fútbol Juegan en el Mismo Equipo

Imagínate que tú, que tanto te gusta el fútbol, de pronto te ganas una rifa, cuyo premio es una entrada para la final de la Copa Mundial. Ahora te encuentras allí, sentado cómodamente y en primera fila, impresionado por aquel majestuoso estadio y, a su vez, ansioso por ver salir a los jugadores de tu equipo favorito y porque empiece el juego ya. Todo esto y el bullicio te han impedido darte cuenta de que tienes a tu lado a tu antiguo profesor de matemáticas, quien, ni corto, ni perezoso, te interroga "¿hay matemáticas tras el fútbol?". Tú titubeas; pero su respuesta es un rotundo: **sí que las hay.**

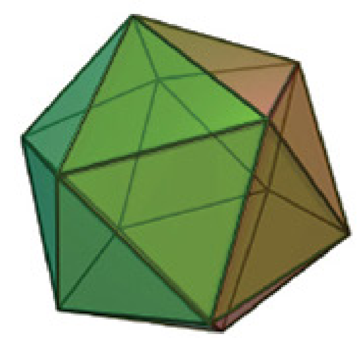
Cuando se habla de matemáticas y la relación con el fútbol, encontramos que todo está ligado a los números: las medidas de la cancha y los arcos, las figuras geométricas, las demarcaciones del terreno de juego, los 22 jugadores, los números en sus camisetas, los 90 minutos del juego, y los tantos de goles; por no mencionar, los millones que ganan los jugadores y los muchísimos más que mueve la "industria"del fútbol.

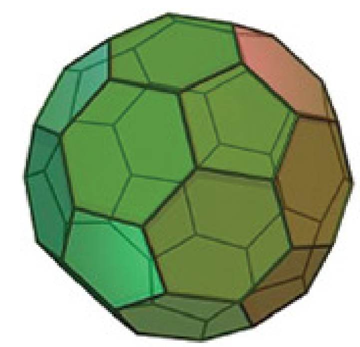
Por otra parte, sabemos, por ejemplo, que la formación del matemático está encaminada a resolver problemas mediante el razonamiento lógico y este modo de razonar no es en absoluto ajeno al fútbol; como en el resto de los deportes de equipo, el fútbol combina la forma rápida de toma de decisiones con el mantenimiento de un orden táctico, que, a veces, nos recuerda múltiples conceptos geométricos, línea defensiva, rombo, triangulación, la manera de organizar a los jugadores en el terreno de juego, por ejemplo, el 4-4-2. Al final, si la cosa se empata, se pone en juego el recurso del tiro penal, que puede ser promotor de interesantes debates e investigación en torno a nociones de probabilidad y estimación de longitudes.



Según el Dr. Ken Bray, de la Universidad de Bath, las matemáticas y sus principios científicos son esenciales para alcanzar las más altas cotas del fútbol mundial. Dice textualmente, *"El fútbol es un arte, pero también es una ciencia y cada jugador utiliza la geometría, la aerodinámica y la probabilidad de realizar cada acción en el mejor momento. La comprensión de los principios científicos y matemáticos podría valer su peso en oro, si desea una carrera en el fútbol"*. En este mismo orden de ideas, nada menos que Marcus Du Sautoy, catedrático de matemáticas en la Universidad de Oxford y divulgador de fama mundial declara *"Un ataque del Arsenal es un rompecabezas geométrico en movimiento. Los jugadores corren en busca del gol trazando triangulaciones alrededor del balón. En cuestión de segundos, los rivales tienen que descifrar ese código e intuir dónde va a aparecer el siguiente triángulo."* Para mí, dice el profesor a su ex-alumno, esto es matemática en acción, y éste le responde, es como si la matemática estuviese jugando en el mismo equipo, ¿verdad? Ciertamente.

El balón mismo puede generar interesantes interrogantes matemáticas, como ¿qué figura geométrica es? Y es que si te fijas en un balón de fútbol, observarás que no es una esfera sino un poliedro que al ser inflado con aire, adopta una forma bastante esférica; tanto es así, que algunos de los comentadores lo llaman el esférico. Se trata del icosaedro truncado, un poliedro, así llamado, por ser el que se obtiene cuando a un icosaedro le cortamos las 20 esquinas a distancias iguales, de cada vértice (cada corte es de un tercio de la arista). Está formado por 20 hexágonos regulares y 12 pentágonos regulares; y tiene 90 aristas. Este poliedro ocupa un volumen del 86,74 % de la esfera circunscrita; porcentaje que aumenta hasta el 95 %, al ser inflado.

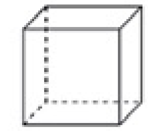
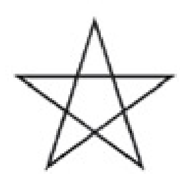




Ya cuando el juego está en plena acción, el profesor le dice a su antiguo alumno: pareciera que es difícil relacionar las matemáticas con el fútbol; sin embargo, como podrás observar, este deporte es de movimientos refinados, complejos y acrobáticos, y por lo tanto, contiene una cantidad considerable de física y matemáticas. Aunque también es una lucha y se deben encontrar las mejores estrategias; por lo que parece natural el que varias teorías, como la "teoría de juegos"puedan usarse en este deporte.

Héctor Vielma Nava
UPEL-IPC

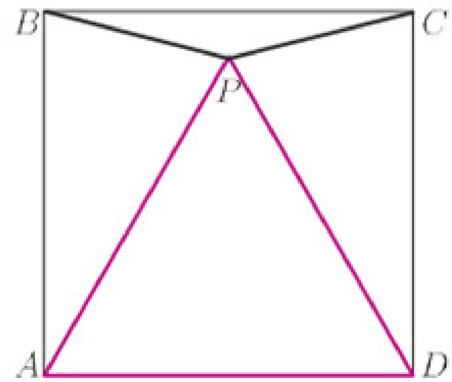
JUNIO 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 	**3** Tres niños suman sus edades y luego restan su edad. Pedro obtuvo 16, Carlos 19 y Luis 21. ¿Cuánto suman las edades de ellos más la de Teresa y la de Cristina que tienen 8 y 10 años, respectivamente?	**4** En el mes de octubre del año 2013, Sara y su padre celebraron sus cumpleaños. Las edades actuales de Sara y su padre suman 52 años. Si el papá tiene 3 veces la edad de su hija, ¿en qué año nació Sara?	**5** ¿Cuál es el resultado que se obtiene al sumar el número de aristas y el número de vértices de un cubo cualquiera? 	**6** OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2014 Final Nacional OJM 2014 Sábado, 7 de junio de 2014
9 25 aniversario OLCOMA XVI OMCC 2014 Costa Rica	**10** Pensé un número de dos cifras. La suma de sus cifras es nueve e invirtiendo las cifras, el número formado es 9 unidades menos que el número que pensé. ¿Cuál es el número que pensé?	**11** FIFA WORLD CUP Brasil 2014 Inauguración de la Copa Mundial de Fútbol Brasil 2014	**12** Al multiplicar cierto número por 13, éste aumenta en 60 unidades. ¿Cuál es ese número?	**13** Un cuadrado y un rectángulo tienen igual perímetro de 20 cm. Si un lado del rectángulo mide 7 cm, ¿cuál es el valor de la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo?
16 Tengo dos recipientes llenos de agua y en el más grande hay el doble de litros que en el otro. Si saco 12 litros de agua de cada recipiente, en el más grande habrá el triple de litros que en el otro. Inicialmente, ¿cuántos litros de agua había en el envase más pequeño?	**17** ¿Cuál es el menor número de dos cifras que es igual al cuadrado de su cifra de las unidades?	**18** ¿Cuántos y cuáles números de dos cifras son el cuadrado de la cifra de sus unidades?	**19** Usando todos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 arma dos números de tres dígitos diferentes cuyo producto sea el mayor posible.	**20** ¿Cuál es la suma de los divisores primos de 2014?
23 	**24** Sólo ha habido una selección que haya participado en todas las ediciones del Mundial de Fútbol. Se trata de Brasil. 	**25** ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura? 	**26** ¿Cuál es la menor cantidad de dígitos que hay que borrar para que lo que quede del número 234956 sea divisible por 3 y por 4?	**27** OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2014 Final Nacional ORM 2014 Sábado, 28 de junio de 2014
30 ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con los dígitos 2, 3 y 5?				

Varias Soluciones a un Problema Clásico

En matemáticas y especialmente en las olimpiadas matemáticas es posible encontrar problemas que se muestran una y otra vez como ejemplos en diversas situaciones, tanto que pueden considerarse problemas clásicos, parte de la sabiduría popular. Uno de estos problemas dice

> En el interior de un cuadrado $ABCD$ se construye el triángulo BPC de forma que los ángulos $\angle BCP$ y $\angle CBP$ tengan medida $15°$, como se muestra en la figura. Demuestre que el triángulo APD (destacado) es un triángulo equilátero.



Veamos ahora varias soluciones a este problema, utilizando diferentes herramientas de la enseñanza escolar.

Primera solución. Para esta solución necesitamos un resultado de la geometría bastante conocido. Utilizaremos que en un triángulo los lados de mayor longitud están en posiciones opuestas a los ángulos de mayor medida. Es decir, que si un triángulo tiene por ejemplo ángulos de medidas $80°$, $70°$ y $30°$, su lado mayor estará opuesto al ángulo que mide $80°$ mientras su lado menor estará opuesto al ángulo de medida $30°$ y el lado de longitud intermedia estará opuesto al ángulo de medida $70°$.

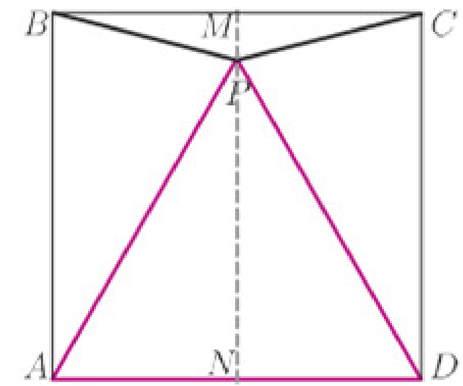
Vamos a suponer que el ángulo $\angle APB$ mide más de $75°$. Entonces, aprovechando que por la simetría de la figura el ángulo $\angle DPC$ tiene la misma medida, sumando a ellos que el ángulo $\angle BPC$ mide $150°$ tenemos alrededor de P más de $300°$ ya considerados por lo que el ángulo restante, $\angle APD$, mide menos de $60°$. Además, por ser $AP = PD$ nuevamente por simetría, los dos ángulos $\angle ADP$ y $\angle DAP$ miden lo mismo y son entonces mayores que $60°$ (para que al sumar sus medidas con la del ángulo $\angle APD$ el resultado sea $180°$, como debe ser al ser los ángulos internos del triángulo APD).

Con esa información, el ángulo $\angle APB$ es mayor que el ángulo $\angle ABP$ que mide exactamente $75°$, por lo que el resultado nos dice que el segmento AB es más largo que el segmento AP. Por otra parte, el ángulo $\angle APD$ mide menos de $60°$ por lo que necesariamente tiene menor medida que el ángulo $\angle ADP$, con lo que gracias a nuestro resultado inicial AP tiene mayor longitud que AD.

Tenemos así que AB es más largo que AP y a la vez que AP es más largo que AD, imposible porque AB y AD son lados del mismo cuadrado. No es posible entonces que la medida del ángulo $\angle APB$ sea mayor que $75°$.

En la misma forma podemos mostrar que no es posible que la medida del ángulo $\angle APB$ sea menor que $75°$ por lo que debe ser igual, lo que hace $AB = AP = AB$ y por tanto, con los segmentos AP, AD y DP de la misma longitud, el triángulo APD resulta ser equilátero.

Segunda solución. Para esta solución utilizaremos un poco de trigonometría. Llamaremos M al punto medio del lado BC y N el punto medio de AD. Calcularemos la medida del segmento NP, para lo que calcularemos primero la medida de MP. Si llamamos ℓ el lado del cuadrado, la longitud BM es $\ell/2$ y la longitud de MP es entonces $(\ell/2) \times \tan(15°)$. Calculemos entonces el valor $\tan(15°)$, cálculo que podemos hacer utilizando que $15° = 60° - 45°$.



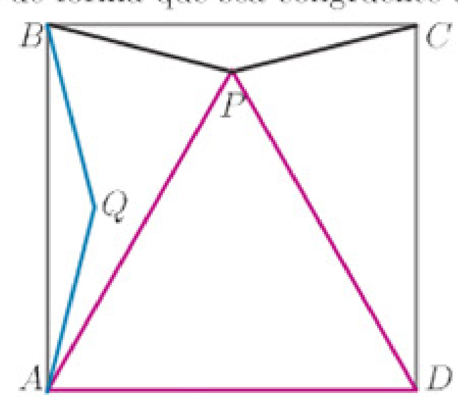
$$\tan(15°) = \tan(60° - 45°) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

que al racionalizar se transforma en $2 - \sqrt{3}$. Así, $MP = (\ell/2) \times (2 - \sqrt{3}) = \ell - \ell \times (\sqrt{3}/2)$. Como MN es claramente igual a ℓ, NP resulta ser igual a $\ell \times (\sqrt{3}/2)$. Ahora, para el ángulo $\angle NAP$ tenemos que

$$\tan(\angle NAP) = \frac{NP}{NA} = \frac{\ell \times (\sqrt{3}/2)}{\ell/2} = \sqrt{3}$$

con lo que podemos concluir que la medida del ángulo $\angle NAP$ es $60°$ y de aquí, por simetría, el triángulo APD tiene dos ángulos con medida $60°$ lo que lo hace necesariamente equilátero.

Tercera solución. Construyamos, también al interior del cuadrado, el triángulo AQB de forma que sea congruente al triángulo BPC.



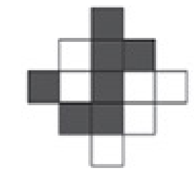
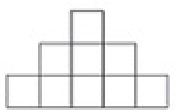
En el triángulo QBP tenemos que BP y BQ tienen la misma longitud, por lo que el triángulo es isósceles, pero además como los ángulos $\angle ABQ$ y $\angle BCP$ miden $15°$ el ángulo $\angle QBP$ tiene necesariamente medida $60°$, con lo que QBP es un triángulo equilátero. Así, $AQ = QP$. Además, podemos determinar que el ángulo $\angle AQB$ mide $150°$ y como el triángulo QBP es equilátero, el ángulo $\angle BQP$ mide $60°$, por lo que la medida de $\angle AQP$ es también $150°$.

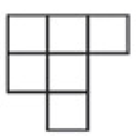
Tenemos entonces que en el triángulo AQB se cumple $AQ = QB$ y la medida del ángulo $\angle AQB$ es $150°$. Por su parte, en el triángulo AQP se cumple $AQ = QP$ y la medida del ángulo $\angle AQP$ es $150°$. Estos datos son suficientes para afirmar, por el criterio *lado-ángulo-lado*, que los triángulos AQB y AQP son congruentes. Tenemos entonces que AB y AP tienen la misma medida y desde ese resultado, utilizando la simetría de la figura, que el triángulo APD es equilátero.

Oscar Bernal

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

JULIO 2014

<table>
<tr><th>Lunes</th><th>Martes</th><th>Miércoles</th><th>Jueves</th><th>Viernes</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>1 ¿Cuántos capicúas de 3 cifras son múltiplos de 6?</td>
<td>2 ¿Cuántos triángulos diferentes de lados enteros puedes dibujar con perímetro 27 cm?</td>
<td>3
IMO 2014
Cape Town - South Africa
55a IMO
Ciudad del Cabo, Sudáfrica</td>
<td>4 ¿Cuál es la menor cantidad de cuadrados que debes colorear para que la figura tenga un eje de simetría?
</td>
</tr>
<tr>
<td>7 Si la figura está formada por cuadrados idénticos y el perímetro de la misma es 16 cm, ¿cuál es su área?
</td>
<td>8 La suma de tres números pares consecutivos es 90, ¿cuál es el mayor de ellos?</td>
<td>9 Rodolfo tiene algunos caramelos para repartir a sus amigos. Si le diera 1 caramelo a cada amigo le sobrarían 2 caramelos; pero si tratara de darle 2 caramelos a cada amigo, uno de ellos no recibiría caramelos. ¿Cuántos amigos y cuántos caramelos tiene Rodolfo?</td>
<td>10 ¿Cuántos números entre 10 y 1000 son tales que sus cifras sean números primos idénticos?</td>
<td>11

Final de la Copa Mundial de Fútbol Brasil 2014</td>
</tr>
<tr>
<td>14 La figura está formada por seis cuadrados de perímetro 11 cm cada uno. ¿Cuál es el perímetro de la figura?
</td>
<td>15 ¿Cuántos números abc de 3 dígitos son tales que $$1 < a < b < c < 7?$$</td>
<td>16 ¿Cuál es el menor número impar de tres cifras distintas?</td>
<td>17 Nieves colecciona fotos de deportistas famosos. Cada año el número de sus fotos es igual a la suma del número de fotos de dos años anteriores. El año 2012 tenía 129 fotos y este año 2014 tiene 339 fotos. ¿Cuántas fotos tenía el año 2008?</td>
<td>18 ¿Cuántos números enteros positivos menores que 50 tienen exactamente 3 divisores?</td>
</tr>
<tr>
<td>21 Durante algunos días consecutivos, Isabel recibió varios chocolates de regalo. El primer día recibió un chocolate y cada uno de los demás días recibía un chocolate más que el día anterior. Si en total recibió 78 chocolates, ¿cuántos días estuvo recibiendo chocolates?</td>
<td>22 ¿Cuántos números del 10 al 20 se pueden obtener como la suma de cuatro números naturales consecutivos?</td>
<td>23 Rosa escribe los números del 1 al 100 usando un creyón negro, pero los números que terminan en 4 o que son múltiplos de 4 los escribe con un creyón azul. ¿Cuántos números escribe con el creyón azul?</td>
<td>24 El balón de este mundial es el Brazuca
</td>
<td>25 ¿Cuál es la mitad del triple del cuadrado de 50?</td>
</tr>
<tr>
<td>28 ¿Cuál es el producto de los divisores primos de 2014?</td>
<td>29 Luis dice que su número favorito está en la tabla y es tal que no es un número primo y la suma de sus divisores es 3240. ¿Cuál es el número?
<table><tr><td>2013</td><td>2017</td><td>2015</td></tr><tr><td>2011</td><td>2014</td><td>2012</td></tr></table></td>
<td>30 En una fiesta infantil, hay 10 niñas y 12 niños. Cada niña le da un regalo a cada niño y cada niño le da un regalo a cada niña. ¿Cuántos regalos hubo en total?</td>
<td>31 Si la cuarta parte de un número a es 40, y a es la tercera parte de b. ¿Cuál es el número b?</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Una Ecuación Diofántica

En la enseñanza media se aprende a resolver ecuaciones tales como $3x - 7 = 0$ o $x^2 - 4x + 2 = 0$. En general lo que se busca son soluciones reales: la primera ecuación tiene a $7/3$ como solución única, mientras que la segunda tiene dos soluciones irracionales, a saber $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$. Luego se aprende que las ecuaciones algebraicas pueden tener también soluciones complejas, por ejemplo $x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene soluciones reales pero tiene las soluciones complejas $2+i$ y $2-i$. Sin embargo, a veces sólo interesan las soluciones enteras de una ecuación, y en ese caso se dice que estamos ante una **ecuación diofántica**. Más precisamente: una ecuación diofántica es una ecuación algebraica con coeficientes enteros, en una o varias variables, de la cual sólo nos interesa hallar las soluciones enteras. El nombre proviene de Diofanto de Alejandría, matemático griego del siglo III que muchos consideran el padre del álgebra. Diofanto escribió un importante tratado de aritmética en trece libros (de los cuales sólo se conservan seis) y en él resuelve algunos problemas de este tipo. Pierre de Fermat (1601–1665) estudió la Aritmética de Diofanto, y escribió el enunciado de su famoso teorema en uno de los márgenes.

Veamos como ejemplo el siguiente problema:

En la pizarra están escritos dos números naturales de dos cifras. Alejandro multiplicó entre sí los dos números y obtuvo un número de cuatro cifras, con la primera cifra de la izquierda igual a 2. Joaquín sumó los dos números de la pizarra. Si al número de Alejandro se le suprime la primera cifra de la izquierda, resulta un número de tres cifras, igual al número de Joaquín. ¿Cuáles pueden ser los dos números de la pizarra?

Para resolver este problema llamemos x e y a los dos números en la pizarra. Entonces el número de Alejandro es xy y el de Joaquín es $x + y$. Como la primera cifra del número de Alejandro es 2, suprimirla equivale a restarle 2000. Entonces la condición del problema se traduce en la ecuación

$$xy - 2000 = x + y. \tag{1}$$

En esta ecuación se puede despejar y en función de x. En efecto, la ecuación se puede escribir como $xy - y = x + 2000$, de donde $y = (x + 2000)/(x - 1)$. Esto nos muestra que hay infinitas soluciones reales, ya que para cada valor de x diferente de 1 se puede obtener un y tal que se satisfaga la ecuación. Por ejemplo, si ponemos $x = 7$ resulta $y = 2007/6 = 339/2$. El problema es que la mayoría de estas soluciones no son números enteros. Para solventar esta situación se podría analizar la expresión $(x+2000)/(x-1)$ y obtener condiciones para que sea entera, pero en realidad hay un enfoque mejor. Escribamos la ecuación (1) en la forma $xy-x-y = 2000$. Observemos que el miembro izquierdo se parece mucho al desarrollo del producto $(x-1)(y-1)$, que es $xy-x-y+1$. Sumando 1 a ambos miembros de (1) se obtiene

$$xy - x - y + 1 = 2000 + 1,$$

es decir

$$(x - 1)(y - 1) = 2001, \tag{2}$$

Como sólo nos interesan las soluciones con x e y números naturales, la ecuación (2) nos muestra que $x - 1$ e $y - 1$ deben ser factores (naturales) de 2001. Ahora bien, la descomposición en producto de factores primos de 2001 es $3{\cdot}23{\cdot}29$, de donde se deduce que 2001 se puede expresar como producto de dos factores de las maneras siguientes: $1 \cdot 2001$, $3 \cdot 667$, $23 \cdot 87$ y $29 \cdot 69$. Las dos primeras se descartan, pues recordemos que x e y deben ser números de dos cifras. A partir de $23 \cdot 87$ obtenemos el par de números 24 y 88, y de $29 \cdot 69$ obtenemos el par 30 y 70. Éstas son las dos únicas soluciones.

La técnica anterior se puede aplicar a cualquier ecuación diofántica de la forma

$$xy + ax + by = c. \tag{3}$$

En efecto, como $(x + b)(y + a) = xy + ax + by + ab$, sumando ab a ambos miembros nos queda la ecuación equivalente

$$(x + b)(y + a) = c + ab, \tag{4}$$

que se resuelve buscando todas las factorizaciones de $c + ab$ en dos factores. Ecuaciones de este tipo se presentan con frecuencia al resolver problemas de olimpiadas matemáticas.

Otras ecuaciones diofánticas importantes son las lineales $ax+by = c$, la de Fermat $x^2+y^2 = z^2$ (cuyas soluciones en números naturales son las llamadas *ternas pitagóricas*) y la de Pell-Fermat $x^2 - Dy^2 = 1$. La solución de estas ecuaciones se puede ver en nuestro libro *Olimpiadas matemáticas—El arte de resolver problemas*, Editorial CECSA, Caracas, 2005.

José H. Nieto S.
Universidad del Zulia
`jhnieto@gmail.com`

AGOSTO 2014

Viernes 1

¿Cuál es el mayor número par de tres cifras y todas distintas?

Lunes 4

Se tienen cuatro tarjetas como muestra la figura:

2 5 7 4

¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor número impar que se puede formar con todos esos números?

Martes 5

Lucas puede construir 5 mesas en tres días y su amigo Teobaldo 3 mesas en dos días. Si los dos amigos trabajan juntos, ¿en cuántos días podrían construir 38 mesas?

Miércoles 6

César quiere repartir 9 bombones de chocolate idénticos a sus amigas Gabriela, María y Noris. Si cada una debe recibir al menos dos bombones, ¿de cuántas maneras distintas puede César hacer esa repartición?

Jueves 7

¿Cuál es el mayor número primo de dos cifras cuya suma de dígitos es también un número primo?

Viernes 8

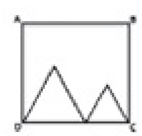
¿Cuántos números de tres cifras (distintas de cero) son múltiplos de 3 tales que al borrarles la última cifra resulta un múltiplo de 5 y al borrarles la primera cifra resulta un múltiplo de 4?

Lunes 11

Si al mayor número de cuatro cifras distintas que se puede formar con los dígitos 4, 7, 0 y 3 se le restan 25 centenas, ¿qué resultado se obtiene?

Martes 12

En el gráfico, los triángulos son equiláteros. Si la suma de sus perímetros es 18, ¿cuál es el área de la región cuadrada $ABCD$?



Miércoles 13

¿Cuál es el resto que se obtiene al dividir al mayor número compuesto de cuatro cifras entre el menor número primo de dos cifras?

Jueves 14

Si todos los números pares se colocan de acuerdo al patrón de la figura, ¿debajo de qué letra aparecerá el número 2014?

C	I	F	R	A	S
	2		4		6
12		10		8	
	14		16		18
24		22		20	
	26		...		...

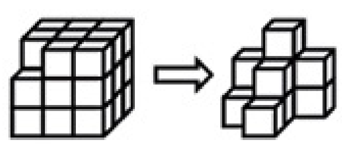
Viernes 15

¿Cuántos arreglos diferentes se pueden conseguir con las letras de la palabra MAÑANA?

Lunes 18

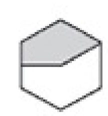
Martes 19

¿Cuántos cubitos se quitaron del primer bloque para obtener el segundo?



Miércoles 20

La región sombreada en gris tiene un vértice en el centro del hexágono regular y otro vértice en el punto medio de uno de sus lados. ¿Qué fracción del hexágono está sombreado?



Jueves 21

¿Qué resultado se obtiene al calcular $(2\cdot 0\cdot 1\cdot 4)^{2014}+2\cdot[(2+0+1+4)+(2+0+1)\cdot 4]\cdot 53$?

Viernes 22

Jorge colocó una clave de cuatro dígitos a su maleta. Escribió la lista: 7032, 4513, 2730, 5984, 5071, 6324, 9517, 6319, 2695 con la condición de que en cada número hay uno y solo un dígito que ocupa la misma posición del número clave. ¿Cuál es la clave?

Lunes 25

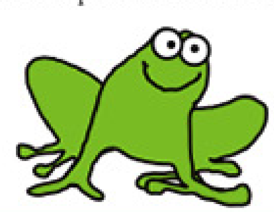
¿De cuántas formas es posible escoger un presidente y un vicepresidente de una asamblea de 20 miembros?

Martes 26

Una moneda es lanzada 3 veces. ¿Cuántas secuencias diferentes de cara y sello se pueden obtener?

Miércoles 27

Un sapo realiza 3 saltos en 4 segundos. ¿Cuántos segundos le toma al sapo hacer 9 saltos?



Jueves 28

Halle el número más pequeño si la suma de tres números consecutivos es 48.

Viernes 29

Antonio escribe todos los números de cuatro dígitos en los cuales el producto de sus dígitos es 6. Luego suma todos estos números. ¿Cuál es el valor que obtiene Antonio?

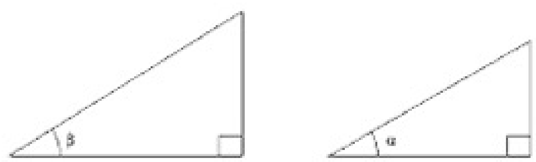
Seno y Coseno de la Suma de Dos Ángulos

Existen diversas formas de encontrar identidades para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos. La mayoría de procedimientos envuelven construcciones geométricas complicadas y es quizás por esta razón que muchas veces no son presentadas en los libros y mucho menos a los estudiantes en el salón de clase.

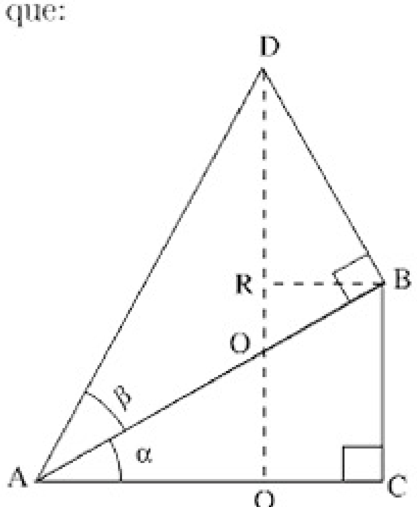
Presentamos a continuación una manera simple y elegante de justificar estas identidades, usando unas construcciones apropiadas muy sencillas y usando conceptos geométricos básicos.

Identidad del Seno de la Suma de Ángulos

Para la construcción de esta identidad partiremos de dos triángulos rectángulos con ángulos α y β tal como se muestran en la figura, donde la medida del cateto de uno de ellos sea igual a la medida de la hipotenusa del otro.



Si ubicamos los dos triángulos de tal forma que coincidan como se muestra en la figura, logramos formar el ángulo CAD cuya medida es: $\alpha+\beta$. Partiendo de esto tenemos que:



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \qquad \sin\beta = \frac{DB}{AD}$$

Si trazamos los segmentos DQ y RB perpendiculares a los segmentos AC y DQ respectivamente, tenemos que $RQ = BC$ y además, para el triángulo rectángulo DAQ:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{DQ}{AD}$$

Notemos que $DQ = DR + RQ$, de modo que:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{DR+RQ}{AD} = \frac{DR}{AD} + \frac{RQ}{AD} = \frac{DR}{AD} + \frac{BC}{AD}$$

La idea es expresar cada una de las fracciones del lado derecho en términos de los segmentos de los triángulos que contengan los ángulos α y β. Para la fracción $\frac{BC}{AD}$ se tiene que:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BC}{AD}\cdot\frac{AB}{AB} = \frac{BC}{AB}\cdot\frac{AB}{AD}$$

Tomando ahora la fracción $\frac{DR}{AD}$, observamos que:

$$\frac{DR}{AD} = \frac{DR}{AD}\cdot\frac{DB}{DB} = \frac{DR}{DB}\cdot\frac{DB}{AD}$$

De modo que

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BC}{AB}\cdot\frac{AB}{AD} + \frac{DR}{DB}\cdot\frac{DB}{AD}$$

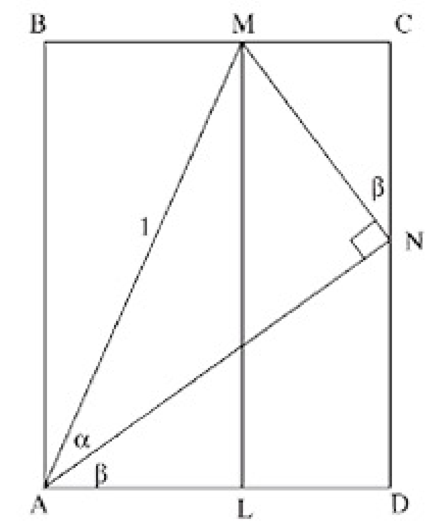
Dado que ODB es un triángulo rectángulo y $\measuredangle BOD \cong \measuredangle AOQ$, entonces $\measuredangle RDB = \alpha$. Así que a partir de esto y de las definiciones de las funciones trigonométricas para los triángulos rectángulos ABC, ADB y RDB:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

De forma similar, bajo esta misma construcción es posible deducir la identidad para el coseno de la suma de ángulos, sin embargo realizaremos otra construcción que nos conducirá a la identidad.

Identidad del Coseno de la Suma de Ángulos

Para la construcción de la identidad del coseno tomamos el rectángulo $ABCD$ que contiene el triángulo rectángulo AMN, cuya hipotenusa es igual a 1, $\measuredangle NAM = \alpha$ y $\measuredangle DAN = \beta$. Además trazamos el segmento LM perpendicular a AD como se muestra en la figura.



Notemos que $\cos\alpha = AN$ y que $\sin\alpha = MN$. Por otro lado, como el triángulo AND es un triángulo rectángulo, entonces

$$\cos\beta = \frac{AD}{AN}$$

De donde obtenemos que

$$AD = \cos\alpha\cos\beta$$

Si tomamos el triángulo MNC, es fácil mostrar que $\measuredangle CNM = \beta$, así que al calcular el seno de β encontramos que:

$$\sin\beta = \frac{MC}{MN} \qquad \text{de donde} \qquad MC = \sin\alpha\sin\beta$$

De modo que si observamos el triángulo rectángulo AML, cuya hipotenusa tiene longitud 1, se forma el ángulo LAM cuya medida es $\alpha+\beta$.

Entonces, si calculamos el coseno del ángulo LAM, obtenemos que la longitud del segmento $AL = \cos(\alpha+\beta)$. Pero como $AL = AD - LD$ y tenemos que $LD = MC$, entonces, $AL = AD - MC$ y así obtenemos que:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

De esta construcción también es posible deducir la identidad para el seno de la suma de ángulos, si se toman las medidas de los segmentos apropiados.

Luís Fernando Cáceres Duque
César Augusto Barreto González
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico-RUM - Puerto Rico

OJM

SEPTIEMBRE 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 El condado Suerte tiene 3 pueblos: A, B, y C. Del pueblo A a B existen 6 caminos directos que los conectan mientras que de B a C hay 4 caminos directos. ¿Cuántas maneras hay de llegar de A a C pasando por B?	**2** ¿Cuál es el valor de x en $$x - 6 \div 2 + 1 = 5?$$	**3** Tres hermanas casadas visitan a sus padres cada 4, 5 y 6 días, respectivamente. ¿Si hoy se reunieron todos, después de cuántos días se conseguirán las tres hermanas en casa de sus padres otra vez?	**4** Luisa tiene 6 latas de 330 ml. de refresco. Ella quiere servirlas en vasos de 200ml. de capacidad. ¿Cuántos vasos puede llenar completos?	**5** En el mercado, 1 pollo equivale a 5 huevos. Cambian 1 pato y 2 gallinas por 3 huevos, y a 1 pato por 4 gallinas. ¿Cuántas gallinas debe dar Germán para recibir un pollo?
8 Marta tiene tres cajas. Cada caja tiene 3 paquetes de caramelos. En cada paquete hay 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Marta?	**9** Luis escribe todos los números de cuatro dígitos en los cuales el producto de sus dígitos es 6. Luego suma todos estos números. ¿Cuál es el valor que obtiene Luis?	**10** ¿Cuántos grados se mueve el minutero de un reloj cada minuto? 	**11** Un hexágono regular ABCDEF tiene perímetro 21 cm. Halle la longitud de BE.	**12** Si se seleccionan tres números del conjunto $A = \{-6, -5, 2, 3, 4\}$ y se multiplican entre ellos, ¿cuál es el menor resultado que se puede obtener?
15 En la floristería un ramo de 8 rosas y 6 gerberas cuesta Bs760. Otro ramo con 6 gerberas y 3 rosas cuesta Bs510. ¿Cuánto debe pagar Pedro por un ramo de 5 rosas y 5 gerberas? 	**16** Seis números enteros diferentes se escriben seguidos en una línea. Cada uno de los cuatro primeros son iguales al promedio de los dos que siguen. ¿Cuál es el valor absoluto de la menor diferencia posible entre el primero y el último número?	**17** En una granja hay pollos y conejos. En total hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántos pollos hay en la granja?	**18** ¿Cuál es el menor entero positivo que no divide al producto de los primeros 100 enteros positivos?	**19** 29ª Olimpiada Iberoamericana Matemáticas Honduras, 2014 XXIX OIM Honduras
22 Dos días después del día de mañana será jueves. ¿Qué día de la semana será 100 días después de hoy?	**23** Un número entero de tres dígitos fue dividido por 9, pero la suma de sus dígitos no cambió. ¿Cuántos números de tres dígitos cumplen con esta propiedad?	**24** Cuando abro mi libro de matemáticas tengo dos páginas delante de mi. Si la suma de los números de las dos páginas es 317, ¿Cuál es el número de la página siguiente?	**25** ¿De cuántas formas diferentes pueden ordenarse 4 niños en una fila en frente de una cafetería?	**26** ¿Cuántos números de 1 a 1000 tienen sus cifras en orden estrictamente creciente?
29 Sofía y Estefanía decidieron ir al club de ajedrez y jugaron algunas partidas. Para su sorpresa, Sofía ganó dos veces y empató 3. Estefanía ganó 3 veces y perdió 3 veces. ¿Cuántas partidas pudieron haber jugado juntas?	**30** En un triángulo ABC, D es el punto medio de AB, E es el punto medio de DB, F es el punto medio de BC. Si el área del triángulo ABC es 48, ¿cuál es el área del triángulo AEF?			

Parábolas, Hipérbolas y Rectas

En algún momento de nuestra educación matemática, todos nos enfrentamos con la factorización de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Ésta está relacionada con la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica es una parábola. Aprendemos que las soluciones de la ecuación (es decir, los cortes de la gráfica $y = f(x)$ con el eje x) están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

Obviamente $a \neq 0$ (¿por qué?), así que, para simplificar la notación, podemos dividir entre a la ecuación original y considerar ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$.

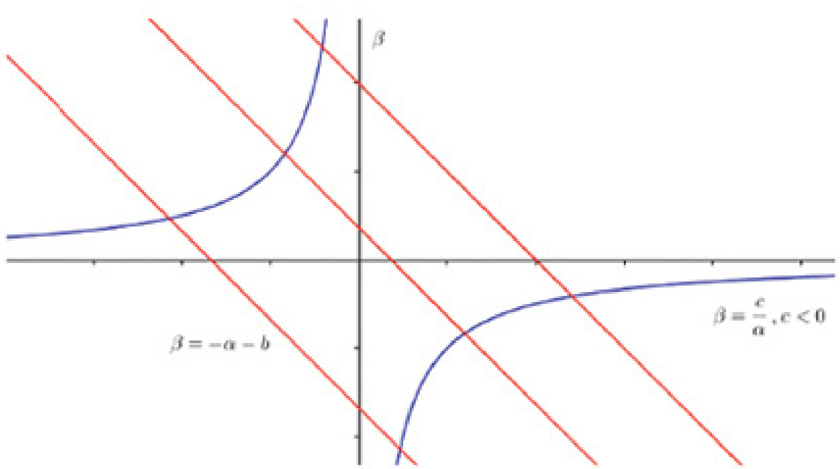
Otra forma común de buscar las raíces de la ecuación es por tanteo. Buscamos α y β tales que la ecuación queda factorizada como $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$. De este modo:

$$\alpha\beta = c \qquad \alpha + \beta = -b \tag{2}$$

Ahora bien, estudiar las ecuaciones (2) para b y c dados, resulta en buscar la intersección entre una recta y las dos hojas de una hipérbola.

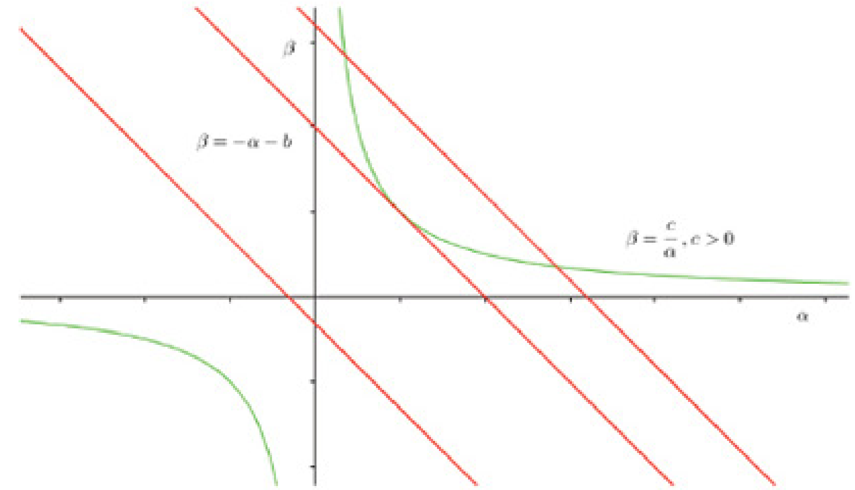
Dependiendo del signo del discriminante $D = b^2 - 4ac$ en la ecuación (1), tendremos entonces tres posibles casos: dos soluciones ($D > 0$), una solución ($D = 0$) o ninguna solución ($D < 0$). Estos casos se corresponden geométricamente con la intersección, la tangencia, o la no intersección de las curvas en (2), respectivamente.

Ahora, como $a = 1$, si $c < 0$ nos queda que $D > 0$, donde siempre tendremos soluciones a la ecuación y las curvas siempre se intersectan en dos puntos como se muestra en la figura

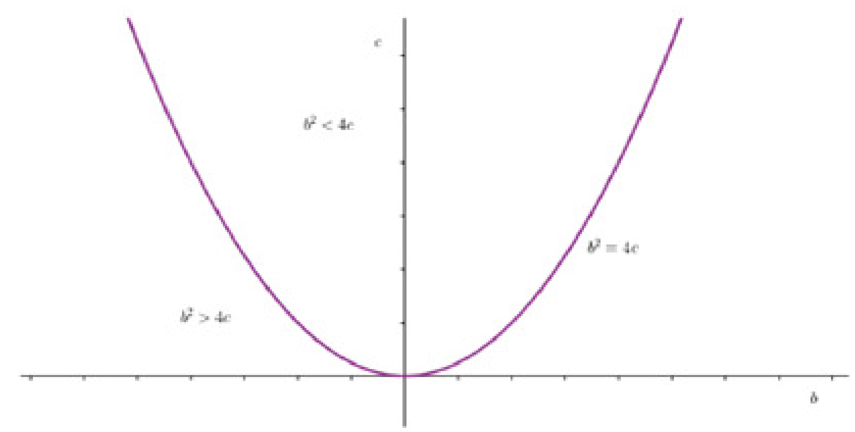


Si $c = 0$, las hipérbolas se degeneran en las rectas $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ por lo que tambien habrá dos intersecciones entre las curvas.

Para $c > 0$, tenemos los tres casos mencionados arriba, dependiendo del valor de b. Así, para $|b| < 2\sqrt{c}$ no hay interseccion, para $|b| = 2\sqrt{c}$ hay tangencia, o equivalentemente, una única solución y para $|b| > 2\sqrt{c}$ hay dos intersecciones, esto es, dos soluciones.



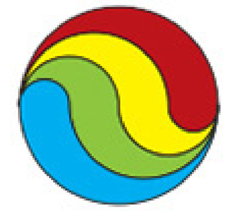
En resumen, la parábola $b^2 - 4c = 0$ separa el espacio de los parámetros b y c, en dos regiones en las que la ecuación pasa de tener dos soluciones ($b^2 - 4c > 0$) a no tener ninguna solución ($b^2 - 4c < 0$). Sobre la parábola la ecuación tiene una raiz doble $\alpha = \frac{-b}{2} = \beta$.



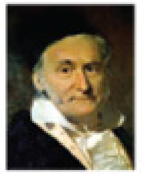
Nos encontramos entonces con un ejemplo de lo que se conoce como una bifurcación, es decir, un cambio en el comportamiento de una familia de ecuaciones al modificar sus parámetros. En este caso particular, el comportamiento es la existencia o no de soluciones de la familia de ecuaciones $F_{b,c}(x) = x^2 + bx + c$ al modificar los parámetros b y c. Otro ejemplo, mucho mas interesante, de una familia de funciones cuadráticas que dependen de un parámetro es $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$. Este muestra, para distintos valores del parámetro μ lo que se conoce como un comportamiento caótico.

José Alberto Infante López
Departamento de Matemáticas, Universidad Simón Bolívar

OCTUBRE 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		1 Calcular el área de cada una de las cuatro partes del dibujo de la pelota de fútbol cuyo radio es 16 centímetros. 	**2** Hemos escogido seis cifras, 1, 3, 4, 7, 8, 9, y con ellas queremos formar dos números que tengan tres cifras cada uno, sin repetir ninguna cifra. ¿Cómo debemos formar estos dos números si queremos que tanto su suma como su producto sea el más grande posible?	**3** Una sala de cine tiene 26 filas con 24 asientos cada una. El total de los asientos se numera de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila y hacia atrás. ¿En qué número de fila está el asiento número 375?
6 De los 200 estudiantes de bachillerato de un liceo, 150 participan en las olimpiadas de matemáticas y 130 en las de física. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, participan en ambas olimpiadas?	**7** Encontrar un número de 4 cifras de la forma $aabb$ que sea cuadrado perfecto.	**8** $(1, 2, 3)$ es una terna de números cuya suma es 6. Si consideramos a $(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2)$ iguales porque tienen los mismos dígitos, ¿cuántas ternas diferentes de dígitos hay, admitiendo repeticiones, cuya suma es 6 ?	**9** De todos los números $abcd$ de cuatro cifras tales que $a < b < c < d$ se escoge el mayor número divisible por 6. ¿Cuál es el dígito de las centenas de este número?	**10** Dos triángulos equiláteros iguales se pegan por un lado. Después todas las esquinas de la figura obtenida se juntan en el centro. ¿Qué figura se obtiene?
13 Para numerar las páginas de un libro grande, hacen falta 3.005 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro? 	**14** ¿Cuántos números tiene la secuencia $0, 7, 14, 21, 28, \ldots, 168$?	**15** Los 7 enanitos de Blanca Nieves nacieron el mismo día pero en 7 años consecutivos. La suma de las edades de los 3 más jóvenes es 42 años. ¿Cuál es la suma de las edades de los 3 más viejos?	**16** ¿Cuál es la suma de todos los números naturales que cumplen con la propiedad que al ser divididos por 7 su resto es igual a su cociente?	**17** En el triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo C, CD, mide igual que la base BC. ¿Cuál es la medida del ángulo CDA?
20 ¿Cuál es el mayor número n tal que la suma $1 + 2 + \ldots + n$ es menor o igual que 2014?	**21** ¿Cuál es el último dígito en el número 2014^{2014}?	**22** ¿Cuántos enteros de cuatro dígitos tienen el dígito de los miles mayor que los otros tres dígitos?	**23** Pedro tiene una bolsa de uvas. Cada día se come 2 uvas y la mitad del resto. Después de dos días sólo le quedan 2 uvas. ¿Cuántas uvas se comió Pedro el primer día? 	**24** El año pasado, cierta isla contaba con 800 habitantes por cada perro. Este año, el número de habitantes decreció en un 16 % y al mismo tiempo, el número de perros aumentó en un 5 %. ¿Cuántos habitantes por perro hay en la isla este año?
27 ¿Cuántos números de tres cifras tienen 6 como producto de sus dígitos?	**28** 3 litros de sopa se cocinan utilizando 60 gramos de sal. ¿Cuánta sal habrá en cada plato si se sirven 250 cc de sopa en cada uno?	**29** ¿De cuántas maneras (sin importar el orden de los sumandos) se puede obtener 50 como suma de dos primos?	**30** ¿Cuántos años faltan, después de 2014, para el primer año que sea el producto de 3 enteros consecutivos?	**31** Si el patrón de formación de la secuencia de las primeras 5 letras continúa: ABCDEABCDEABCDE... ¿Cuál letra ocupa el lugar 2014 en la secuencia?

El Polígono de 17 Lados

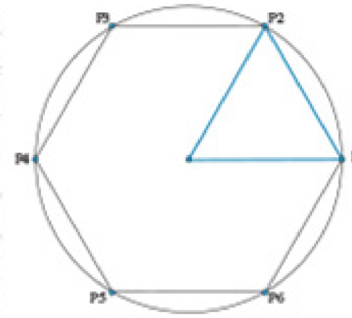


Karl Friedrich Gauss (1777-1855) nació en Brunswick (Alemania) el 30 de Abril de 1777 en un hogar muy humilde. Su padre Gerald Gauss era jardinero y albañil. En la historia de la Matemática es frecuente la manifestación temprana del talento, pero la precocidad de Gauss no admite comparación. Un sábado su padre Gerhard Gauss preparaba el pago semanal de algunos obreros que tenía a su cargo, mientras su hijo seguía con atención los cálculos. Cuando Gerhard informó a uno de sus empleados el monto que le correspondía, se sorprendió al escuchar a su hijo, "Padre, eso está equivocado, tiene que ser..."No se trataba de ninguna cuenta demasiado complicada. Apenas algunos productos de dos cifras y dos decimales. Nada sorprendente si no se agrega que Carlitos no había cumplido los tres años y que a su padre le tomó un rato rehacer la cuenta para descubrir que su hijo tenía razón. Más aún, nadie le había enseñado a leer, tampoco a contar y ya lo hacía en forma autodidacta.

A la edad de diez años, cuando se encontraba en la clase de Aritmética en su escuela primaria el maestro (de apellido Büttner) les asignó una tarea que consistía en sumar los números del 1 al 100. Era costumbre en la escuela que el alumno que terminaba la tarea dejase su pizarra encima de una mesa. Apenas había terminado Büttner de plantear el problema cuando Gauss puso su pizarra, en la que solo había escrito el número 5050, sobre la mesa. Durante la siguiente hora Gauss permaneció con los brazos cruzados mientras sus compañeros hacían cuentas. Ya viejo, a Gauss le gustaba contar como el número escrito por él era el correcto, mientras que todos los demás resultados, obtenidos tras largas cuentas, estaban errados. Cuando se le preguntó cómo había obtenido el resultado dijo que simplemente había sumado el primer número con el último (1+100), el segundo con el penúltimo (2+99) y así sucesivamente para obtener 50 pares que sumaban cada uno 101, así el total debía ser 50x101=5050. Un simple truco una vez conocido, pero poco frecuente en un niño de diez años. Büttner quedó tan impresionado que muy pronto declaró: "No puedo enseñarle nada más".

Afortunadamente Büttner tenía un ayudante, Johan Martín Bartels (1769-1836) un joven de 17 años apasionado por la matemática. Estudiaron juntos en su texto de álgebra y rudimentos de análisis y entre ambos surgió una amistad perdurable. Bartels hizo mucho más por Gauss que introducirlo en el mundo de la matemática. Como conocía personas influyentes en Brunswick, los puso en conocimiento del asombroso talento de su joven discípulo. Estos, impresionados del genio de Gauss lo llevaron ante Carl Wilhelm Ferdinand, Duque de Brunswick quien finalmente pagó los gastos de la educación posterior de Gauss. Con el patrocinio del Duque, Gauss pudo inscribirse en 1792 en el Colegium Carolinum de su ciudad natal y posteriormente en 1795 ingresar en la Universidad de Göttingen.

Pronto manifestó interés en lenguas antiguas y filología llegando a albergar dudas sobre dedicar su vida a la matemática o a la filología, pero a los 19 años logró construir con regla y compás el polígono de 17 lados así como demostrar que ni el de 7 lados, ni el de 9 son construibles, resultado que ampliaremos a continuación. La solución de estos problemas que nadie había podido resolver desde la época de la antigua Grecia lo animó a dedicar su vida a la matemática.



Un polígono regular es aquel que tiene sus lados y ángulos respectivamente iguales (congruentes). Si en una circunferencia se toma una cuerda igual al radio y se unen sus extremos al centro se tiene un triángulo equilátero, como el ángulo central es de 60° podemos repetir el triángulo 6 veces y obtener así un hexágono regular inscrito en la circunferencia. Alternando tres vértices en el hexágono obtenemos un triángulo equilátero. Bisecando el arco de cada lado del hexágono (basta cortarlo con la bisectriz del ángulo central) obtenemos 6 nuevos puntos en la circunferencia que unidos con los anteriores nos permiten construir un polígono regular de 12 lados inscrito en la circunferencia. Vemos así que podemos construir polígonos de $3, 6, 12, \ldots 3 \cdot 2^n$ lados. Nótese además que construir un polígono de n lados es equivalente a dividir una circunferencia en n partes iguales.

Cortando la circunferencia con dos diámetros perpendiculares, obtenemos los vértices de un cuadro inscrito y por bisección resultan construibles los polígonos de $4, 8, 16, \ldots 2^n$ lados. Los griegos también lograron construir con regla y compás el pentágono (5 lados) y el pentadecágono (15 lados) y bisecando son construibles los polígonos con $5 \cdot 2^n$ y $15 \cdot 2^n$ lados.

Durante más de dos milenios se había intentado infructuosamente construir los polígonos de 7, 9, 13 y 17 lados. Aun con 18 años Gauss no sólo logró construir el polígono de 17 lados sino que demostró que la condición necesaria y suficiente para que la circunferencia sea divisible en n partes iguales (n impar) es que n admita una descomposición en factores **primos** de la forma:

$$n = \left(2^{2^{\alpha_1}} + 1\right)\left(2^{2^{\alpha_2}} + 1\right) \ldots \left(2^{2^{\alpha_k}} + 1\right)$$

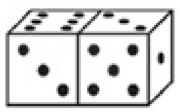
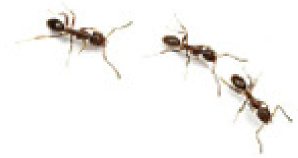
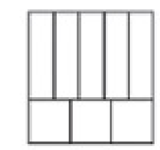
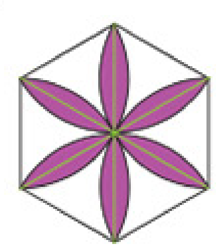
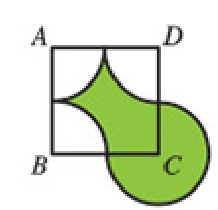
donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ son números naturales **diferentes.**

Los números de la forma $F_k = 2^{2^k} + 1$ son conocidos como "primos"de Fermat quien creía que todos son primos. Los cinco primeros: $F_0 = 2^1 + 1 = 3, F_1 = 2^2 + 1 = 5, F_2 = 2^4 + 1 = 17, F_3 = 2^8 + 1 = 257$ y $F4 = 2^16 + 1 = 65537$ lo son, pero Euler descubrió que el sexto F_5 es divisible por 641: $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$. Puesto que 3, 5 y 17 son primos y de Fermat, F_0, F_1 y F_2 respectivamente, son construibles con regla y compás el triángulo equilátero, el pentágono regular y el polígono regular de 17 lados; en cambio no lo es el de 9 lados ya que no es producto de primos de Fermat **diferentes** $(9 = F_0 \times F_0)$ ni los 7 y 13 lados por no ser éstos números de Fermat.

No hay rama de la matemática pura o aplicada que no le deba a Gauss aportes importantes: teoría de números, ecuaciones, series, geometría infinitesimal, entre otras. Fue el primero que tuvo la idea de la indemostrabilidad del postulado de Euclides. Sus obras completas están editadas en diez volúmenes, Leipzig, 1870-1930. Falleció en 1855 y se dice que pidió que en su lápida figurara un polígono de 17 lados.

Bernardo González
Universidad Metropolitana

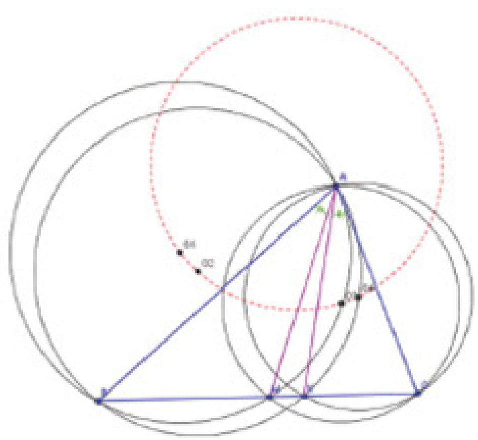
NOVIEMBRE 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 Dos dados idénticos se pegan juntos como se muestra en la figura. La suma de los puntos de dos caras opuestas de un dado siempre es siete. ¿Cuál es la suma de los puntos de las caras que están pegadas? 	**4** Se tienen tres cajas: una blanca, una azul y una verde y tres frutas: un cambur, un mango y una lechosa. Cada fruta en una caja. El cambur está en la caja blanca o en la caja azul. El mango no está ni en la caja blanca ni en la caja verde. ¿De qué color es la caja donde está la lechosa?	**5** Tres hormigas caminan a lo largo de una recta numérica. Cuando se cansan, la hormiga María se sienta en el número 24, la hormiga Ana se sienta en el número 66 y la hormiga Carmen se sienta entre María y Ana, a dos tercios de la distancia de María a Ana, quedando más cerca de Ana. ¿En cuál número está Carmen sentada? 	**6** En una fábrica, la máquina A produce 60 % de las piezas de la fábrica mientras que la máquina B produce el resto. 5 % de los productos de la máquina A son defectuosos y 2 % de los productos de la máquina B son defectuosos. ¿Qué porcentaje de productos producidos por la fábrica son defectuosos?	**7** Tres piezas cuadradas y cinco piezas rectangulares se acomodan formando un cuadrado como muestra la figura. Si cada una de las piezas cuadradas tiene 60 cm de perímetro y las otras cinco piezas son iguales entre sí, ¿cuál es el perímetro, en centímetros, de cada una de estas cinco piezas? 
10 Los animales del bosque organizaron una carrera. Ellos corren por un camino circular y después de cada vuelta el último corredor sale de la carrera. ¿Cuántas vueltas corrió el canguro, que quedó en el puesto décimo entre 100 corredores?	**11** Durante su vida Daniel ha vivido en distintas ciudades de Venezuela. La cuarta parte de su vida vivió en Caracas, la sexta parte en Barquisimeto, la mitad en Valencia y los últimos 6 años los ha vivido en Mérida. ¿Cuántos años tiene Daniel?	**12** Ana coloca 6 fichas rojas redondas de radio 10 cm en la mesa de modo que cada ficha toque dos otras fichas sin superponerse y sus centros sean vértices de un hexágono regular. Luego, Ana nota que en el medio de las fichas hay suficiente espacio para introducir una ficha azul que toque el resto de las fichas sin superponerse. ¿Cuál es el radio de la ficha azul?	**13** Un tanque puede llenarse con dos llaves. Con una de las llaves se llena en 10 min si trabaja sola y a toda su capacidad; con la otra, en las mismas condiciones, se llena en 20 min. Si ambas llaves trabajan simultáneamente a toda su capacidad, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque?	**14** ¿Cuál es la cifra de las unidades de 7^{2014}?
17 Una florista tiene 24 flores blancas, 42 rojas y 36 amarillas disponibles para la venta. A lo máximo, ¿cuántos ramos idénticos puede armar si quiere usar todas las flores que quedan? 	**18** Un examen está formado por 10 preguntas que deben responderse como falso o verdadero. La lista de respuestas correctas del examen está diseñada de tal manera que si un estudiante responde al azar 5 falsos y 5 verdaderos seguro obtiene al menos 4 respuestas correctas. ¿Cuántas claves diferentes cumplen con esta afirmación?	**19** A una cantidad le sumo su 10 %, y a la cantidad así obtenida le resto su 10 %. ¿Qué porcentaje de la cantidad original me queda?	**20** Se forma un cubo de 4 cm de lado uniendo cubos de 1 cm de lado. Se dice que dos cubos están en contacto si tienen una cara en común. ¿Cuántos de estos cubos de 1 cm de lado están en contacto con exactamente otros 4 cubos de 1 cm?	**21** Un entero es tartamudo si todas sus cifras son iguales a 1. ¿Cuántos enteros positivos menores que 10.000.000 cumplen que al multiplicarlos por 33 se obtiene un entero tartamudo?
24 ¿Cuántos son los números enteros entre 100 y 400 que tienen alguna de sus cifras igual a 2?	**25** Alejandro pensó tres números. Si los suma de dos en dos obtiene 38, 44 y 52, ¿cuál es el mayor de los tres números?	**26** Calcular el área sombreada del siguiente hexágono regular de lado 1. 	**27** ¿De cuántas maneras se puede escoger en un tablero de ajedrez una casilla blanca y una negra, de tal manera que no estén las dos en una misma fila ni en una misma columna?	**28** El área del cuadrado $ABCD$ es 1. ¿Cuánto mide el área sombreado? 

Alguna Soluciones Creativas de Problemas

¿Qué podemos entender por "solución creativa" de un problema matemático? Tal vez aquella que se basa en el, a veces denostado término, de "idea feliz", que surge de repente como un relámpago y reduce la solución a una simple percepción visual. Otras veces el asunto hay que trabajarlo más... yo siempre aconsejo a mis estudiantes que recuerden que las ideas felices no abundan, y que por lo tanto es importante tener presente las que se les han ocurrido antes a otros matemáticos, para adaptarlas a nuestros propios problemas.

El primer ejemplo procede de la Olimpiada de Rusia, del año 2011, Fase de Repúblicas, grado 10. La autora del problema es Tatiana Emelyanova.

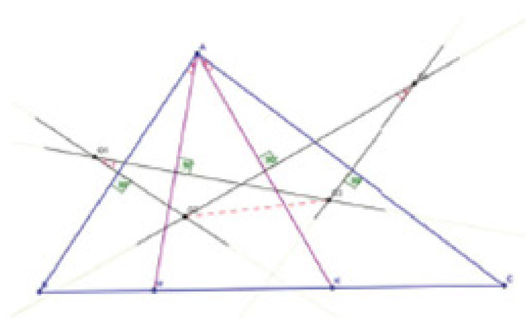


En el lado BC del triángulo ABC se toman dos puntos, M y K, tales que los ángulos $\widehat{BAM}$ y $\widehat{KAC}$ sean iguales. (Para fijar ideas, suponemos que M está entre B y K). Demostrar que los circuncentros de los cuatro triángulos BAM, BAK, MAC y KAC están en una misma circunferencia.

Esta figura procede de un peculiar libro de A. Akopyan, "Geometry in figures", en donde no hay enunciados de los problemas...lo que se conoce está en trazo continuo, y lo que ha de demostrarse, en trazo discontinuo.

Los cuatro circuncentros son O_1, de ABM; O_2, de ABK; O_3, de AMC; y O_4, de AKC.

Las rectas O_1O_3 y O_1O_2 son las mediatrices de los segmentos AM y AB, respectivamente. Entonces los ángulos $\widehat{O_2O_1O_3}$ y $\widehat{BAM}$ son iguales, porque sus lados están comprendidos entre perpendiculares.



El mismo argumento prueba que los ángulos $\widehat{O_2O_4O_3}$ y $\widehat{KAC}$ son también iguales. Pero ya que AM y AK son isogonales, el resultado es evidente, porque el segmento O_2O_3 se ve desde O_1 y O_4 bajo el mismo ángulo.■

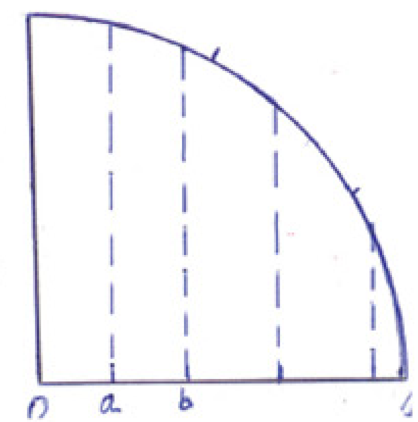
El segundo ejemplo es una desigualdad procedente de la Olimpiada de las Repúblicas Checa y Eslovaca de 1994.

Demostrar que de toda cuaterna de números reales distintos, del intervalo abierto $]0,1[$, se puede siempre elegir a dos de ellos, digamos a y b, tales que

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - ab - \frac{1}{8ab}.$$

(No nos dejemos llevar por el pánico ante el amenazador aspecto del segundo miembro...)

La primera idea para atacar el problema puede ser intentar descubrir lo que su autor ha tratado de ocultar cuidadosamente: la relación con las funciones trigonométricas. Pero su camuflaje no es perfecto: si elegimos números en el intervalo abierto $]0,1[$, cada uno de ellos puede ser considerado como el coseno de un cierto ángulo comprendido entre 0^o y 90^o; y el hecho de que en el interior de la raíz aparezcan $1-a^2$ y $1-b^2$ refuerza nuestras sospechas. Así pues, utilizaremos la sustitución trigonométrica $t \to \cos t$.



La segunda idea es ver lo que sucede si elegimos 4 números en $]0,1[$ y por cada uno de los puntos que los representan trazamos perpendiculares hasta que corten a la circunferencia trigonométrica (en su primer cuadrante). Si este cuadrante lo dividimos en TRES partes iguales y en $]0,1[$ elegimos CUATRO puntos, el principio de las casillas permite asegurar que *al menos dos de los puntos sobre el cuadrante serán interiores a uno de los tres arcos de longitud $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$ en los que el cuadrante ha quedado dividido:*

Entonces podemos afirmar que de toda cuaterna de números en las condiciones del problema, podemos elegir dos, a y b, tales que

$$a = \cos\alpha, b = \cos\beta;\ \text{con } 0 < |\alpha - \beta| < \frac{\pi}{6}.$$

Como la función coseno es decreciente en el primer cuadrante, de la anterior desigualdad con los ángulos se deduce la siguiente, con los cosenos:

$$\cos(\alpha-\beta) > \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

y el primer miembro es $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Ahora podemos volver a ocultar las funciones trigonométricas:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)},$$

y así tenemos la desigualdad

$$ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

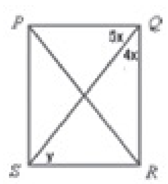
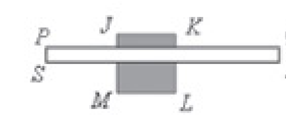
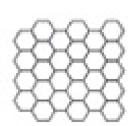
que es cierta. Para llegar a la desigualdad propuesta hace falta un poco más de práctica algebraica: elevando al cuadrado obtenemos

$$2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > a^2 + b^2 - 2a^2b^2 - \frac{1}{4},$$

y dividiendo por $2ab > 0$ se llega al resultado deseado.■

Francisco Bellot Rosado
Real Sociedad Matemática Española

DICIEMBRE 2014

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 Si se tiene $$x^2yz^3 = 7^3 \text{ y } xy^2 = 7^9,$$ entonces, ¿cuál es el valor de xyz?	**2** Se construyen todos los triángulos de perímetro 57 con medidas de lados enteras y diferentes. ¿Cuántos triángulos de este tipo hay?	**3** En cierto mes hubo tres martes que correspondieron a días con número par. ¿Qué día de la semana correspondió al 21 de ese mes?	**4** La edad promedio de los miembros de la familia Quintos es de 18 años. Si sabemos que el papá tiene 38 años y que el promedio de las edades de los miembros de la familia sin contarlo a él es de 14 años, ¿Cuántos miembros tiene la familia Quintos?	**5** La abuela le dijo a sus nietos: Si horneo 2 panquecitos para cada uno de ustedes me sobrar ´a masa para 3 panquecitos más. Si quisiera hornear 3 panquecitos para cada uno de ustedes me haría falta masa para hornear 2 panquecitos. ¿Cuántos nietos tiene la abuela?
8 	**9** Hace 8 años Felipe era 6 años menor que Luis. Si dentro de 5 años la suma de sus edades será 40 años. ¿Cuál será la edad de Luis el próximo año?	**10** ¿Cuál es la suma de las cifras del menor número de 4 cifras divisible por 3,5,7 y 11?	**11** Hay 65 banderas que tienen por lo menos 2 colores cada una, 25 tienen rojo y azul, 15 rojo y blanco; 35 blanco y azul. ¿Al menos cuántas banderas tienen los tres colores mencionados?	**12** 12 obreros hacen una obra en 28 días; si 8 de ellos aumentan su rendimiento en un 60 %. ¿Qué tiempo emplearán en hacer la misma obra?
15 $PQRS$ es un rectángulo con diagonales PR y QS. Halle el valor, en grados, de y. 	**16** ¿Cuál es el próximo año en sumar igual que la suma de los dígitos de 2014?	**17** El Libertador Simón Bolívar murió el 17 de diciembre de 1830. ¿Cuántos años habrán transcurrido hasta el 17 de diciembre de 2014?	**18** Diego y Mauricio quieren comprar el mismo libro. Diego tiene $\frac{3}{4}$ del dinero necesario para comprarlo y Mauricio sólo la mitad del dinero. Si el libro costara Bs 3 menos, juntando el dinero de ambos alcanzarían justo para comprar 2 copias del libro. ¿Cuánto cuesta el libro?	**19** $JKLM$ es un cuadrado y $PQRS$ un rectángulo. Si JK es paralela a PQ, $JK = 8$ y $PS = 2$, ¿cuál es el área total de la región sombreada? 
22 El promedio de cinco números pares consecutivos es 12. ¿Cuál es el promedio del menor y el mayor de estos números?	**23** ¿Cuál es el menor número de colores que se deben usar para colorear todos los hexágonos si se usan colores diferentes para los hexágonos que comparten lado? 	**24** El número 636405 puede ser escrito como el producto de tres números enteros positivos de dos dígitos. Halle la suma de estos tres enteros.	**25** El Trofeo Jules Rimet fue el premio original de la Copa Mundial desde 1930 a 1970. Luego, se sustituyó por la copa actual. 	**26** José escoge cinco números diferentes. ¿De cuántas maneras puede asignar estos números a las variables p, q, r, s y t tal que $p < s, q < s, r < t$ y $s < t$?
29 Enteros de cuatro dígitos han sido creados usando los dígitos 2, 0, 1, y 4. ¿Cuál es la diferencia entre el entero más grande y el más pequeño creado así?	**30** Considere los enteros positivos x de dos dígitos tales que, si 109 se divide entre x, se obtiene 4 como resto. ¿Cuál es la suma de todos esos números x?	**31** ¿Cuál es el dígito de las unidades en $5^{35} - 6^{21}$?		

Soluciones Enero-Junio 2014

Enero

1	6 - 5 - 4 en cualquier orden.
2	6.
3	1011.
7	6.
8	10.
9	2,014.
10	6.
13	16.
14	63.
16	24.
17	14.
20	4.
21	168.
22	155.
23	5.
24	$\frac{4}{13}$.
27	12.
28	Triángulos.
29	90 %.
30	60 %.
31	20 %.

Febrero

3	1120.
4	8.
5	8.
6	Jueves.
7	6.
10	David.
11	34.
12	2.
13	Francisco.
14	72.
17	24.
18	840.
19	372.
20	38 m.
21	17.
24	24 formas.
25	Aumenta en 180.
26	3 triángulos y 2 cuadrados.
27	150.
28	37,5 %.

Marzo

5	503,5.
6	4.
7	Inés.
10	12.
11	64 cm.
12	Bs. 1125.
13	Son la misma cantidad: 22,75.
14	10.
17	38 y 53.
18	8.
21	4.
24	8.
25	18.
26	22.
27	252.
28	86.
31	9.

Abril

1	72.
2	7 cuadrados.
3	$\diamondsuit$.
4	30 kg de agua.
7	7 latas.
8	30.
9	20 camisas y sobran 4 botones.
10	$\frac{2}{5}$.
11	192.
21	8.
22	2.
23	Bs. 420.
24	39.
25	74.
28	1653.
29	6.
30	5.

Mayo

5	Amalia.
6	70.
7	15.
8	8.
9	7 transferencias.
12	$A = 7, B = 16$ y $C = 46$.
13	2013.
14	Bs. 239,40.
16	Cuadrado, hexágono regular y dodecágono.
19	23 rectángulos.
20	15.
21	24.
22	6 cm.
23	201 decenas.
26	10.
27	986.
28	6 cm^2.
29	4.
30	12.

Junio

3	46.
4	2000.
5	20.
10	54.
12	5.
13	46 cm^2.
16	24.
17	25.
18	Dos números: 25 y 36.
19	631 y 542.
20	74.
25	10 cuadriláteros.
26	1.
30	2220.

México 1970

Alemania 1974


Argentina 1978


España 1982


México 1986


Italia 1990

Soluciones Julio-Diciembre 2014

Julio

1	13.
2	18.
4	2.
7	9 cm^2.
8	32.
9	4 amigos y 6 caramelos.
10	8.
14	33 cm.
15	10.
16	103.
17	15.
18	4.
21	12.
22	3.
23	30.
25	3750.
28	2014.
29	2014.
30	240.
31	480.

Agosto

1	986.
4	4968.
5	12.
6	10 maneras.
7	89.
8	6.
11	4930.
12	36.
13	0.
14	F.
15	120.
19	15.
20	$\frac{5}{12}$.
21	2014.
22	2014.
25	380.
26	8.
27	12.
28	15.
29	33330.

Septiembre

1	24 maneras.
2	7.
3	60 días.
4	9 vasos.
5	10 gallinas.
8	27 caramelos.
9	33330.
10	6°.
11	7 cm.
12	-72.
15	Bs. 550.
16	11.
17	7 pollos.
18	101.
22	Miércoles.
23	6.
24	160.
25	24 maneras.
26	129.
29	2 partidos.
30	18.

Octubre

1	64π m^2.
2	941 y 873.
3	16.
6	80.
7	7744.
8	7.
9	5.
10	Un rectángulo.
13	1028 páginas.
14	25.
15	54.
16	168.
17	108°.
20	62.
21	6.
22	2025.
23	8.
24	640.
27	9.
28	5 gramos.
29	4 maneras.
30	170.
31	E.

Noviembre

3	8.
4	Verde.
5	52.
6	3,8 %.
7	78.
10	91 vueltas.
11	72 años.
12	10 cm.
13	6 $\frac{2}{3}$ min.
14	9.
17	6.
18	22.
19	99 %.
20	24.
21	1.
24	138.
25	29.
26	$2\pi - 3\sqrt{3}$.
27	768.
28	1.

Diciembre

1	7^4.
2	61.
3	Domingo.
4	6.
5	5.
9	19.
10	12.
11	5.
12	20 días.
15	50°.
16	2023.
17	184.
18	Bs. 8.
19	48.
22	12.
23	3.
24	259.
26	8.
29	3186.
30	71.
31	9.

USA 1994

Francia 1998

Corea del Sur y Japón 2002

Alemania 2006

Sudáfrica 2010

Brasil 2014

Una actividad de:

Asociacion Venezolana
de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
Oc. 331. Los Chaguaramos, Caracas 1020.
Venezuela. Telefax: 212 605.1512.
e-mail: asomatemat8@gmail.com
www.acm.ciens.ucv.ve

fundación
EMPRESAS POLAR

RIF: J-00110574-3

FUNDECOM
Fundación para el Desarrollo
de Competencias Matemáticas

Olimpiada Recreativa de Matemática
e-mail: ormvenezuela@gmail.com
www.olimpiadarecreativa.com

ASOCIACIÓN
MATEMÁTICA
VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS
FÍSICAS, MATEMÁTICAS
Y NATURALES

HECHO EL DEPÓSITO DE LEY
Depósito Legal CC259201333

Coordinador General:
Rafael Sánchez Lamoneda

Coordinador Nacional ORM:
Dra. Eólide Plaza de Salazar

Recopilación y Soluciones problemas ORM
Eduardo Sarabia
Henry Martínez
Silvina María de Jesús

Recopilación y Soluciones problemas OJM
Laura Vielma Herrero

Revisión Academica:
José Heber Nieto

Edicion y Montaje:
Laura Vielma Herrero

Colaboradores:
Bernardo González
César Barreto
Douglas Jiménez
Fabiola Czwienczek
Francisco Bellot
Héctor Vielma
Ignacio Iribarren
José Alberto Infante
Lisandro Alvarado
Luís Cáceres
Óscar Bernal

Diseño de portada y montaje digital
Rogelio –Paco– Chovet

Producción editorial
Gustavo Suárez