Matemáticos y el Premio Fundación Empresas Polar «Lorenzo Mendoza Fleury»

fundación EMPRESAS POLAR

Presentación

El presente es el sexto Calendario Matemático que elaboramos con motivo del Programa de Olimpiadas Matemáticas, que lleva adelante la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la Fundación Para el Desarrollo de Competencias. El mismo tiene como objetivo facilitar a docentes y alumnos, un grupo de problemas de matemáticas recreativas, junto con una serie de pequeños artículos de divulgación de temas matemáticos o sugerencias de trabajo en el aula. Para esto último contamos con la colaboración de un grupo de colegas de varias instituciones nacionales e internacionales, quienes gustosamente nos ofrecen su apoyo todos los años.

De todos es conocido el premio Nobel,(`www.nobelprize.org`), que otorga anualmente la Academia Sueca en varias áreas del quehacer humano. Este premio deja un vacío al no incluir a los matemáticos entre los galardonados. Sin embargo, existen una serie de premios en el mundo dirigidos especialmente a esta productiva comunidad.

Entre los más importantes hay cuatro otorgados por la Unión Internacional de Matemáticos, IMU por sus siglas en inglés, la medalla Fields, establecido en 1936, dirigido a matemáticos menores de 40 años, por sus grandes aportes al desarrollo de esta ciencia, el premio Nevanlinna, en honor a Rolf Nevanlinna, y establecido en 1982, con el objetivo de premiar aportes al desarrollo de aspectos computacionales de las matemáticas, el premio Carl Friedrich Gauss, otorgado por vez primera en el año 2006 para destacar aquellas contribuciones excepcionales en matemáticas que hayan tenido aplicaciones importantes fuera de ella y la medalla Chern, desde el año 2010, para aquellos individuos cuyo talento matemático ha alcanzado un altísimo grado de reconocimiento, `http://www.mathunion.org/general/prizes`.

Wolf Foundation · קרן וולף

ABEL PRISEN

También y fuera de la IMU tenemos el premio Wolf, `www.wolffund.org.il`, y el premio Abel, `www.abelprize.no`. que reconocen la trayectoria de matemáticos durante toda su vida. En el área de las competencias matemáticas, también hay premios internacionales, la Federación Mundial de Asociaciones de Competencias Matemáticas, WFNMC por sus siglas en inglés, otorga cada dos años el premio Erdös, a matemáticos que han ayudado a difundir las competencias matemáticas en un país o región, `http://www.amt.edu.au/wfnmcaw.html`.

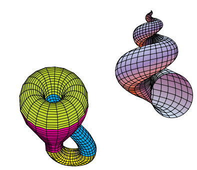
fundación EMPRESAS POLAR

En Venezuela tenemos un premio dirigido a toda nuestra comunidad científica el cual goza de un gran prestigio desde la primera vez que se otorgó. Es el premio "Lorenzo Mendoza Fleury", de la Fundación Empresas Polar, conocido comúnmente como el Premio Polar. Este premio se otorgó por vez primera en el año de 1983 y en homenaje por estos 30 años de tan distinguida actividad le dedicamos nuestro calendario.

Como parte de este homenaje contamos con 7 artículos escritos por 7 matemáticos venezolanos que han recibido el premio, además de otros realizados por algunos de nuestros colaboradores usuales así como una historia breve del premio, escrita por Renato Valdivieso.

Unas palabras sobre los problemas. Hemos tenido el cuidado de presentarlos en orden creciente de dificultad, aunque eso siempre tendrá sus detractores, pues lo que resulta fácil para algunas personas, puede ser difícil para otras. Los seis primeros meses son dedicados a problemas de la Olimpiada Recreativa de Matemáticas.

El lector podrá ver en las esquinas superiores el símbolo ORM y sus siglas, para indicar esta competencia. En el segundo semestre del año cada página se identifica con las siglas OJM, para indicar que los problemas corresponden a la Olimpiada Juvenil de Matemáticas.



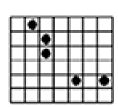
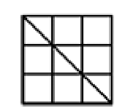
Aprovechamos la oportunidad para agradecer a todos nuestros colaboradores, quienes desinteresadamente nos entregan año a año buenos artículos para enriquecer el Calendario Matemático.

Para mayor información sobre las Olimpiadas Matemáticas puede visitar nuestros sitios de internet, `www.acm.ciens.ucv.ve` y `www.olimpiadarecreativa.com`

Rafael Sánchez Lamoneda
Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
Universidad Central de Venezuela

ORM

ENERO 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 **"El genio se compone del dos por ciento de talento y del noventa y ocho por ciento de perseverante aplicación."** Ludwig Van Beethoven (1770 - 1827). Compositor, director de orquesta y pianista.	**2** ¿Qué cifra debe colocarse en lugar de $\star$ para que la igualdad $1\star 52 \div 7 = 236$ sea correcta?	**3** Mueve un palillo para que la siguiente igualdad sea correcta 6+8=5	**4** Corrige la siguiente igualdad errónea $17 + 54 = 60$ intercambiando de lugar dos dígitos.
7 Dos regalos cuestan Bs. 110 en total. Si uno de ellos cuesta Bs. 100 más que el otro, ¿cuánto cuesta el regalo más caro?	**8** Se tiene una caja grande, con cuatro cajas medianas dentro, tres cajas chicas dentro de cada mediana y dos cajas pequeñas dentro de cada chica. ¿Puedes decir cuál es el número total de cajas que se tienen?	**9** Si una caja de galletas tiene 9 paquetes, cada uno de estos tiene 10 galletas y se quieren repartir, equitativamente, entre 6 niños ¿cuántas galletas le toca a cada uno de ellos?	**10** Un día del año 2013, una amiga le dice a otra: "Hace dos días mi hijo Eduardo tenía 6 años y el año que viene cumplirá 9 años". ¿Cuándo nació Eduardo?	**11** Carlos juega con sus amigos. Al principio tiene 346 metras. Primero gana 125 metras, después gana 208, y al final pierde 112 metras. ¿Con cuántas metras se quedó al terminar el juego?
14 Ana tiene 12 caramelos, Mónica tiene 7 caramelos menos que Ana y Esther tiene 4 caramelos más que Mónica. ¿Cuántos caramelos tiene Esther?	**15** **"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber."** Albert Einstein (1879 - 1955). Físico.	**16** ¿Cuántas unidades son 3 centenas y 7 unidades?	**17** Ricardo tiene 6 años más que su hermana. Si Ricardo tiene 23 años, ¿cuántos años tiene su hermana?	**18** Elba empieza sus clases a las 7:20 am y sale 5 horas y media después. Se va a su casa y llega en 1 hora y 15 minutos. ¿Qué hora es cuando llega a su casa?
21 Somos dos números cuyo producto es 24 y nuestra diferencia es 10. ¿Quiénes somos?	**22** ¿Cuántas casillas blancas más deben tener un círculo negro para que la cantidad de casillas blancas sean el doble de la cantidad de casillas con círculos negros? 	**23** ¿Cuántas unidades son 20 centenas más 1 decena más 3 unidades?	**24** Cuatro amigos comen helado. Se sabe que: Natalia come más que Alicia, Elías come más que Jimmy, Elías come menos que Alicia. Ordena a los amigos desde el que come más hasta el que come menos.	**25** ¿Cuántos triángulos hay en la figura? 
28 Una heladería ofrece 7 sabores distintos de helados (vainilla, fresa, chocolate, coco, nutella, almendra y avellana). ¿Cuántas barquillas diferentes de 2 sabores pueden hacerse?	**29** ¿Cuántos números de seis cifras puedes formar usando cuatro números 2 y dos números 3?	**30** En una mesa hay Bs. 595 en billetes de Bs. 50, Bs. 20, Bs. 10 y Bs. 5. ¿Cuántos billetes hay en la mesa si tienes el mismo número de cada uno de ellos?	**31** Los cumpleaños de Alberto, Benito, Carla y Dora son los días: 16 de enero, 27 de abril, 19 de junio y 19 de enero, pero no en ese orden. Benito y Carla nacieron el mismo mes y Alberto y Carla nacieron el mismo día del mes. ¿Quién nació el 27 de abril?	

Premio Fundación Empresas Polar «Lorenzo Mendoza Fleury»
30 años distinguiendo a la ciencia en Venezuela

El 31 de mayo de 1983 se otorgó por primera vez el premio Fundación Empresas Polar “Lorenzo Mendoza Fleury”. En ya casi treinta años este reconocido galardón se ha entregado en quince oportunidades y se ha reconocido a 75 científicos venezolanos, de los cuales dieciséis son matemáticos.

Los orígenes y objetivos de este premio

A principios de la década de los años ochenta se generalizó en el país cierto escepticismo sobre el papel que debía ejercer la investigación científica en nuestro desarrollo. Como ahora, en esa época esta actividad no parecía ser bien comprendida y el investigador científico, especialmente el de las disciplinas básicas, se sentía poco estimado y, en momentos hasta criticado por la falta de resultados socialmente comprensibles. En vista de esta preocupante sensación y con ocasión de su quinto aniversario, Fundación Empresas Polar quiso hacer algo significativo, de verdadera trascendencia, para el desarrollo de la ciencia en Venezuela. Algo que combatiera ese escepticismo y que contribuyera a elevar la valoración que la sociedad venezolana le asignaba a las actividades científicas y que a su vez permitiera ayudar a crear nuevos referentes para nuestra juventud estudiosa.

Con base en estas consideraciones el 26 de marzo de 1982 se creó el premio Fundación Empresas Polar para dar reconocimiento a los investigadores científicos venezolanos y se le dio el nombre de “Lorenzo Mendoza Fleury” como justo homenaje al fundador de Empresas Polar. Un año después se otorgó, por primera vez, a cinco venezolanos meritorios.

Las bases del premio y su procedimiento

En sus bases quedo instituido que dicho premio se entrega cada dos años, a no más de cinco científicos venezolanos que trabajen en el país, en las áreas de Biología, Física, Química, Matemáticas y sus interdisciplinas. A este efecto, la Fundación Empresas Polar se atribuyó la responsabilidad de nombrar, para cada edición del premio, al jurado, llamado Comité de Selección; un equipo integrado por siete miembros, investigadores de reconocido prestigio, quienes son los encargados de identificar entre los candidatos presentados, a los científicos galardonados.

La primera tarea de cada Comité de Selección es designar a un grupo de entre 50-55 investigadores, llamados Proponentes, quienes son los que escogen hasta tres candidatos, cada uno, y los proponen al Comité de Selección para que estos decidan quienes serán los galardonados en cada edición del premio.

Para llegar al veredicto el Comité de Selección se reúne varias veces para estudiar los expedientes de los candidatos presentados y luego de arduas sesiones de análisis llegan al esperado resultado (los cinco nombres de los científicos ganadores) el cual es presentado a la Junta Directiva de Fundación Empresas Polar, instancia que ratifica dicho veredicto. Luego, se informa al país sobre los investigadores seleccionados y posteriormente, en acto público, se entrega el galardón.

Los resultados

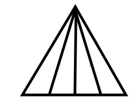
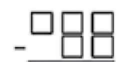
Hasta el año 2012 el premio Fundación Empresas Polar “Lorenzo Mendoza Fleury” se ha entregado en quince oportunidades, dándose reconocimiento a 75 científicos venezolanos, diez de los cuales son mujeres. De este gran total, el 35 % son del área de la biología, 24 % de física, 21 % de matemáticas y 20 % de química. El Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC) es la institución con el mayor número de galardonados. Del total de premiados hasta la fecha, el 37 % pertenecen o han pertenecido al IVIC, seguidos de la Universidad Central de Venezuela (21 %), Universidad de los Andes (15 %), Universidad Simón Bolívar (9 %), Centro de Investigaciones de Astronomía Francisco J. Duarte (5 %). También han sido premiados investigadores de la Universidad de Oriente, Universidad del Zulia, Universidad de Carabobo, IDEA, INTEVEP e IBM.

Hasta ahora, la historia del premio nos muestra que han resultado 16 matemáticos galardonados, ellos son: Carlos Di Prisco (1983), Rodrigo Arocena (1985), Gerardo Mendoza (1987), Gustavo Ponce (1987), Miguel Méndez (1993), Leonardo Mora (1993), Hebertt Sira (1995), José Rafael León (1997), Antonio Tineo (1997), Luis Báez Duarte (1999), Hugo Leiva (2001), Lázaro Recht (2003), Pedro Berrizbeitia (2005); Carlos Uzcátegui (2007), Stefania Marcantognini (2009) y Carenne Ludeña (2011).

Estamos convencidos que en el futuro algunos de los actuales participantes de las olimpiadas matemáticas irán a engrosar el grupo de los galardonados con el premio Fundación Empresas Polar “Lorenzo Mendoza Fleury”, sin duda, el premio más importante para la ciencia en Venezuela.

Renato Valdivieso

FEBRERO 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				1 ¿Cuántos triángulos hay en la figura? 
4 Alan, Daniel, Pablo y Tomás ganaron las primeras posiciones en un torneo de ajedrez. La suma de los números de posición de Alan, Daniel y Tomás es 6. La suma de los números de posición de Daniel y Pablo es 6. Daniel quedó mejor ubicado que Alan. ¿En qué lugar quedó cada niño?	**5** Dos pizzas pequeñas y una pizza grande cuesta igual que cinco pizzas pequeñas. Las pizzas pequeñas cuestan Bs. 45 cada una. ¿Cuánto cuesta una pizza grande?	**6** Coloca en los cuadritos a los dígitos 6, 5, 8, 2 y 4 de tal forma que, al restar, obtengas la mayor diferencia posible, ¿cuál es esa diferencia? 	**7** Tenemos cuatro perros: un galgo, un dogo, un alano y un podenco. El podenco come más que el galgo; el alano come más que el podenco y come menos que el dogo. ¿Cuál de los cuatro perros sería más barato de mantener?	**8** En una hilera de cuatro casas, la familia Pérez vive al lado de la familia Gómez pero no al lado de la familia Benítez. Si la familia Benítez no vive al lado de la familia López, ¿cuál es la familia vecina más cercana a la familia López?
11 **“Antes que toda otra cosa la preparación es la clave para el éxito.”** Alexander Graham Bell (1847 - 1922). Científico, inventor y logopeda.	**12** **“El éxito es aprender a ir de fracaso en fracaso sin desesperarse.”** Winston Churchill (1874 - 1965). Político y Primer Ministro del Reino Unido en dos períodos.	**13** Un grifo pierde una gota de agua cada 3 segundos. ¿Cuántas gotas pierde en tres cuartos de hora?	**14** Felipe tiene una bolsa con metras, le da la mitad a Luis y lo invita a jugar; pierde la mitad de las metras que le quedan y ahora tiene 6. ¿Cuántas metras tenía la bolsa?	**15** Si a un número le sumas 4 y le restas 6, el resultado es 3. ¿Cuál es el número?
18 En un tercer grado hay 32 alumnos y 36 asientos. Un día, la maestra entra y ve que en la primera fila hay 3 asientos vacíos, en la tercera fila 2 y en la quinta fila 5. ¿Cuántos alumnos faltaron ese día?	**19** Luisa tiene 36 metras y Juan 10. Juegan juntos y, al finalizar, cada uno tiene la misma cantidad de metras. ¿Quién ganó y cuántas metras ganó?	**20** En el patio de la escuela juegan 280 niños. Al sonar el timbre se colocan en filas de 20 niños cada una. Si todas las niñas se colocan en 6 filas, ¿cuántas filas hay de varones?	**21** Con igual cantidad de billetes de Bs 20 y de Bs 10, Luis ha logrado reunir Bs. 690. ¿Cuántos son los billetes de cada valor?	**22** Soy un número de dos cifras. Tengo un tres en el lugar de las unidades. Soy mayor que 85. ¿Quién soy?
25 Un ascensor sale de la planta baja con 5 personas. El ascensor se detiene en todos los pisos. En cada piso suben 2 personas. En los pisos pares bajan 3 personas y en los pisos impares no baja ninguna. ¿Cuántas personas hay en el ascensor antes de que se abra la puerta en el piso 11?	**26** La camisa de Teresa tiene un dibujo de rombos como el de la figura. La franja mide 24 cm de largo y 10 cm de ancho. ¿Cuál es el área total de la figura?  	**27** El autobús del colegio de Carlos recoge en cada parada un pasajero más que los que recogió en la parada anterior. Si el autobús hace 5 paradas, luego llega al colegio con 40 alumnos y ninguno de ellos se baja antes de llegar al colegio, ¿cuántos alumnos tomaron el bus en la primera parada?	**28** El promedio de las cuatro notas de Andrea en Matemática es de 17 puntos. Si la cuarta nota fue 18, ¿cuál es la suma de las tres primeras?	

¿Son los números racionales muchos?

En la escuela secundaria aprendemos que el conjunto de los números racionales, que denotaremos por la letra $\mathbb{Q}$, es el conjunto formado por todas las fracciones p/q con p y q números enteros. Otra manera de enfrentarlos es la que día a día usamos en nuestras calculadoras y computadoras: números que se escriben de la manera siguiente $a_0, a_1\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_n\, \ldots$ donde las letras (dígitos) a_i pueden tomar los valores enteros en el caso de $i = 0$ o los dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ en cualquier otro caso, y además a partir de un cierto índice i todos los dígitos son 0 o a partir de este índice se comienza a repetir una sucesión finita una y otra vez. Por ejemplo:

$$\frac{1}{10} = 0,1,$$

$$\frac{1}{3} = 0,33333333\ldots,$$

$$\frac{5}{11} = 0,4545454545\ldots.$$

Observemos que los números enteros son racionales y éstos forman un conjunto infinito al no ser un conjunto finito, ya que dado cualquier número podemos siempre conseguir uno más grande. En este sentido podemos responder afirmativamente la cuestión planteada en el título del artículo: ¡sí, son muchos!

Otra manera de enfrentar la noción de muchos es observar que los números racionales forman parte de los números reales: el conjunto de números que se escriben de la siguiente manera $a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n\, \ldots$ donde las letras (dígitos) a_i pueden tomar los valores enteros en el caso de $i = 0$ o los dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ en cualquier otro caso, y que denotaremos por $\mathbb{R}$.

Al conjunto $\mathbb{R}$ lo podemos identificar con los puntos de una recta y en consecuencia podemos decir cuán cerca está un punto del otro y cuándo un tercero se encuentra entre dos números dados. Los números racionales tienen la propiedad de ser entrometidos entre los números reales: entre dos números reales cualesquiera siempre existe entre ellos un número racional. Tienen que ser muchos para poder hacer esto. Nuevamente, ¡sí, son muchos! Esta propiedad se conoce como la densidad de los números racionales. Observe que no podemos decir lo mismo de los números enteros.

Ahora miremos los números como parte de una recta. Uno pensaría que si para cada número racional toma un pequeño intervalo alrededor de él y une todos los números obtenidos de esta manera el conjunto resultante debería ser el conjunto $\mathbb{R}$ pues el centro de estos intervalos están regados por toda la recta. A veces la intuición nos juega malas pasadas. Veamos un argumento para retar a la intuición.

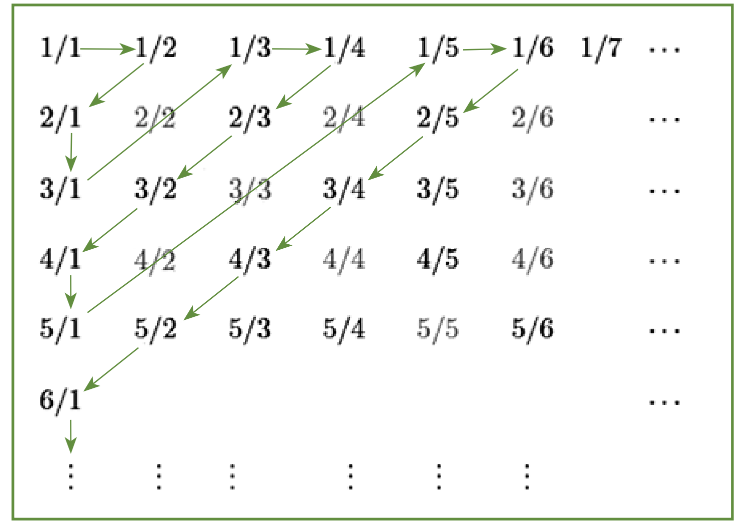


Figura 1: Enumerabilidad de los números racionales

Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los números racionales, vea la Figura 1 para convencerse de que hay una. Tomemos para cada número p_n un intervalo I_n centrado en p_n y de longitud $\dfrac{1}{2^n}$. El conjunto $U_{n=1}^{\infty} I_n$ no puede ser $\mathbb{R}$ ya que la suma de las longitudes de los intervalos I_n es la suma infinita

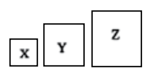
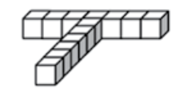
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

cuya suma nos da 1 pero $\mathbb{R}$ contiene intervalos con longitudes tan grandes como se quieran y esto no puede ser. Este último argumento nos dice que los números racionales no son muchos.

¡Difícil la vida! Entonces ¿son o no son muchos? Bueno la respuesta es *depende* o dicho de manera coloquial: *¡ni lo uno ni lo otro sino todo lo contrario!* En matemáticas hay varios puntos de vista para hablar de la noción de "muchos". En la primera respuesta afirmativa usábamos el punto de vista de la teoría de conjuntos, en la segunda respuesta afirmativa fue usado el punto de vista de la topología y en la respuesta negativa usábamos el punto de vista del análisis real.

Leonardo Mora
Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

MARZO 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				1 Se quiere dividir un campo rectangular de 256 m de largo y 96 m de ancho en parcelas cuadradas del mismo tamaño. ¿Cuál es la mayor longitud posible del lado de cada parcela?
4 Luisa tiene 5 billetes de Bs. 50, 7 billetes de Bs. 20 y 14 monedas de Bs. 1, ¿cuántos bolívares tiene Luisa en total?	**5** El perímetro del cuadrado X es dos tercios del perímetro del cuadrado Y. El del cuadrado Y es dos tercios del perímetro del cuadrado Z. El área del cuadrado X es 16 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado Z? 	**6** Un agricultor sembró los 3/25 de su parcela con caraotas; 1/10 con maíz y 7/20 con naranjas. ¿Qué porcentaje del terreno no está sembrado?	**7** A Gabriela su mamá le propone 20 problemas de matemática y le ofrece Bs. 100 por cada problema bien resuelto; pero si Gabriela no lo resuelve bien, debe regresar Bs. 30 a su mamá. Al final, Gabriela recibió Bs. 1480, ¿cuántos problemas resolvió bien?	**8** El cuerpo está construido con trece cubos iguales. Se sumerge en pintura azul y al secarse se desarma. ¿Cuántos cubos quedan con exactamente 4 caras pintadas de azul? 
11 En una escuela, 60 varones y 40 niñas se inscribieron en la Olimpíada Matemática. Recibieron premios el 20 % de los varones y 25 % de las niñas. ¿Cuál es el porcentaje de todos los participantes que recibieron premios?	**12** Una secretaria escribe 5 palabras en el primer minuto de trabajo. En cada uno de los minutos siguientes escribe el doble que en el minuto anterior. ¿cuántas palabras escribe durante el sexto minuto?	**13** ¿En qué cifra termina el número que se obtiene al desarrollar la potencia 2013^{2013}?	**14** ¿Cuál es el menor número mayor que 2013 y que la suma de sus dígitos sea igual a la suma de los dígitos de 2013?	**15** Alberto quiere comprar 24 latas de sardinas y hay cajas para embalar 3, 5, 7, 9 y 11 latas. ¿Cuál será el menor número de cajas que le pueden armar, si las cajas no necesariamente tienen que estar totalmente llenas?
18 Enrique y sus tres amigos quieren repartirse, en partes iguales, 36 dulces. ¿Cuánto le toca a cada uno?	**19** 	**20** ¿De cuántas formas se pueden hacer parejas con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de tal forma que la diferencia entre todas las parejas sean iguales?	**21** OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2013 Canguro Matemático ORM y OJM	**22** El número 8645 se puede escribir como el producto de dos números naturales menores que 100. ¿Cuál es la suma de esos dos números?
25 **“El éxito consiste en vencer el temor al fracaso”.** Charles Agustin Sainte-Beuve (1804-1869). Escritor y crítico literario.	**26** **“Ganar no lo es todo; pero querer ganar lo es.”** Vince Lombardi (1913 - 1970). Entrenador de fútbol americano.	**27** **“Siempre hay que jugar limpio cuando se tiene las cartas ganadoras.”** Oscar Wilde (1854 - 1900) Escritor, poeta y dramaturgo.	**28** **“Es duro caer, pero es peor no haber intentado nunca subir.”** Theodore Roosevelt (1858 - 1919) Presidente de los Estados Unidos para el período 1901-1909.	**29** **“Cada fracaso le enseña al hombre algo que necesitaba aprender.”** Charles Dickens (1812 - 1870). Novelista.

Sé verlas al revés

Un palíndromo es una palabra que al escribirla al revés se obtiene la misma palabra. Por ejemplo, *oso*, *erre*, *radar*, *narran*, *arepera*, *acurruca* y *sometemos* son palíndromos. Su nombre proviene del griego *palin dromein*: volver a ir hacia atrás. Si no se toman en cuenta los acentos, ni los signos de puntuación, hay frases completas que son un palíndromo. Quizá la más conocida de todas es *Dábale arroz a la zorra el Abad*. El título de esta nota también es un palíndromo. Para los aficionados al Beisbol tenemos este: *Agárrala Galarraga*. Hace muchos años, cuando era un estudiante trasnochado en el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), me aficioné por los palíndromos. La búsqueda de palíndromos se tornó en un actividad obsesiva que no me dejaba ni dormir. Mi afición comenzó después de leer el libro *Oír a Darío* del escritor venezolano Darío Lancini (Monte Avila, 1975) que contiene sólo palíndromos, comenzando por el título mismo. Algunos de los que recuerdo:

Yo hago yoga hoy.
Son robos, no sólo son sobornos.
Salta se liga, se ata, se desata, es ágil es Atlas.
Adan no cede con nada.
Sonrieron las acosadas ocas al no reirnos.

Quizá lo mas sorprendente es que Lancini escribió una obra de teatro completa que es un enorme palíndromo. Hoy se puede conseguir muchas páginas web dedicadas a los palíndromos, de ellas provienen la mayoría de los ejemplos que incluyo en esta nota.
Los palíndromos por supuesto también ocurren en otros idiomas. Un ejemplo de una frase en inglés es: *A man, a plan, a canal: Panamá*, que en español diría: Un hombre, un plan, un canal: Panamá. Supuestamente es el epitafio del constructor del canal de Panamá.
Podemos pensar los palíndromos como una sucesión de letras que al escribirlas de derecha a izquierda se obtiene la sucesión original. Por ejemplo: *abefeba*, *ahgatytagha*, *Saippuakauppias*. Claro que estas palabras no existen en español, pero quizás ¡sí en otra lengua! La última que escribí, *Saippuakauppias*, es una palabra en finlandés que significa "vendedor de jabón" y tiene 15 letras.
Al permitir que los palíndromos no sean necesariamente palabras aceptadas del español, entramos en un mundo más amplio y lleno de nuevas e interesantes posibilidades.
Las partituras son frases escritas en el lenguaje especial usado por los músicos. Podemos imaginar una frase musical que sea un palíndromo. Esas composiciones son llamadas *Cánones Cangrejo* (que "caminan" hacia atrás como esos crustáceos). El canon cangrejo más conocido lo escribió el gran compositor alemán Johann Sebastian Bach y es parte de su obra titulada *La Ofrenda Musical*. La estructura simétrica de esos cánones es sorprendente y da lugar a muchas variantes. Al lector interesado le recomiendo que consulte internet y disfrute de los arreglos visuales que han hecho de ese canon de Bach y se sorprenda al ver su relación con la banda de Moebius. Todo esto y mucho más fue analizado por D. Hofstadter en su muy conocido libro *Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid*.

En biología también aparecen los palíndromos, pues el ADN es una palabra escrita usando sólo cuatro letras: A (por adenina), T (por timina), C (por citosina) y G (por guanina). El ADN está formado por dos hebras complementarias, la doble hélice, donde la A y la T van unidas y la G y la C también. Se denomina palíndromo a un segmento de ADN en el que la secuencia de bases de las dos hebras tiene una simetría alrededor de un centro. Por ejemplo, la sucesión $ACCTAGGT$ es un palíndromo, pues su sucesión complementaria $TGGATCCA$ es igual a la original escrita al revés.

$$\begin{array}{cccccccc} A & C & C & T & A & G & G & T \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ T & G & G & A & T & C & C & A \end{array}$$

Observemos, que si por alguna razón la mitad de esa secuencia palindrómica se pierde y quedamos sólo con $ACCT$, podemos reconstruir la sequencia completa. Se cree que el ADN de muchas proteinas contiene palíndromos, aunque la función que juegan no es muy conocida (Wikipedia dixit).
Finalmente, llegamos al sistema simbólico más importante de las matemáticas: Los números. Un número natural se llama *Capicúa* (del catalán, cap i cua, que significa cabeza y cola) si es igual cuando se escribe al revés: 12321, 24655642, etc. Hay un procedimiento para construir capicúas. Tomemos el número 47, lo invertimos y obtenemos 74, lo sumamos al original $47 + 74 = 121$ y obtuvimos una capicúa. Veamos otro ejemplo con el número 257:

$$257 + 752 = 1009 \qquad 1009 + 9001 = 10010 \qquad 10010 + 01001 = 11011$$

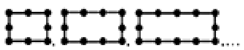
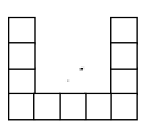
y hemos obtenido una capicúa. Tenemos así un algoritmo que se puede usar con un número natural N cualquiera.

Paso 1 Invierta el número N
Paso 2 Súmele a N el número obtenido
Paso 3 Si la suma es capicúa, termina el proceso
Paso 4 Si la suma no es capicúa, vuelva al paso 1.

Invitamos al lector a usar este procedimiento comenzando con el número 89 y notará que se necesita 24 aplicaciones del procedimiento para obtener finalmente la capicúa 8813200023188.
Lo sorprendente de este procedimiento es que no se sabe si existe un número que nunca lleve a una capicúa. El candidato más famoso que ha escapado a todos los intentos es 196. Hasta ahora no se ha logrado determinar si comenzando con 196 se obtiene una capicúa. Se sabe que al aplicar el procedimiento se obtienen números de 300 millones de cifras y ninguno es capicúa, todo esto después de millones de repeticiones del procedimiento que explicamos. Hay otros números con los cuales se ha intentado sin éxito. Pero 196 es el menor de todos los que permanecen sin respuesta. Por esta razón, el procedimiento descrito se conoce como el *algoritmo 196*.

Carlos Uzcátegui
Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

ORM ABRIL 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 Observa la secuencia de figuras con diferentes números de puntos negros. Si se mantiene el patrón de formación de las figuras, ¿cuál figura tiene 4032 puntos negros?  Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3	**2** La suma de dos números naturales es 77. Si el primer número se multiplica por 8 y el segundo por 6, los productos son iguales. ¿Cuáles son estos números?	**3** ¿Qué número de dos cifras es múltiplo de 8 pero no de 5 y que, al intercambiar el orden de sus cifras, es múltiplo de 5 pero no de 8.	**4** Un fabricante de jabones vende cada paquete a Bs. 57,60. Un paquete contiene una docena de cajas y cada caja contiene 4 jabones. Si un comprador pide más de 100 paquetes, le hacen un descuento del 5 % sobre el total. Un comprador pidió 6000 jabones, ¿cuánto se deberá pagar por este pedido y cuántos paquetes está comprando?	**5** ¿Cuántos números pares múltiplos de 3 hay entre 1 y 120?
8 El número de 5 dígitos 8A65B es divisible entre 24. ¿Cuál es el menor número que puede ser?	**9** Hoy es martes. ¿Qué día de la semana será dentro de 100 días?	**10** Un libro tiene 500 páginas numeradas $1, 2, 3, \ldots, 500$ ¿Cuántas veces aparecerá el número 1 en las paginas numeradas?	**11** Marta gastó $\frac{2}{3}$ de su dinero. Luego perdió $\frac{2}{3}$ del resto y le quedaron Bs. 40 ¿Cuánto dinero tenia Marta al inicio?	**12** Pedro, Luis y Juan practican uno de los siguientes deportes: tenis, beisbol y fútbol pero no en ese orden. A Pedro no le gusta el beisbol ni el fútbol. A Luis no le gusta el beisbol. ¿Cuál es el deporte favorito de Juan?
15 13 limones pesan tanto como 2 manzanas y una pera. 4 limones y una manzana pesan lo mismo que una pera. ¿Cuántos limones pesan lo mismo que una pera?	**16** ¿Cuántos números de tres dígitos hay tales que son múltiplos de 3 y terminan en 1?	**17** La edad de José este año es un múltiplo de 7. El próximo año será un múltiplo de 5. Si la edad de José está entre 20 y 80 años ¿Qué edad tendrá José dentro de 7 años?	**18** Un portarretrato rectangular mide 12 cm de ancho y 18 cm de alto. Si el borde tiene un ancho de 2 cm. ¿Cuánto mide el área del borde?	**19** **“La confianza en sí mismo es el primer secreto del éxito.”** Ralph Waldon Emerson (1803 - 1882). Escritor, filósofo y poeta.
22 Luis tiene cierta cantidad de caramelos. Si reparte en el colegio 250 caramelos y al llegar a casa su mamá le regala un paquete con 113 caramelos, él cuenta que en total tiene 2013 caramelos. ¿cuántos caramelos tenía Luis antes de ir al colegio?	**23** La figura en U contiene 11 cuadraditos iguales. El área de la figura es 176 cm^2. ¿Cuál es el perímetro de la figura? 	**24** ¿Cuál es el resultado que se obtiene al sumar el menor entero positivo divisible entre 2 y 3, y el menor entero positivo divisible entre 2, 3 y 4?	**25** Si Sofía dibuja cuadrados siguiendo el siguiente patrón: un cuadrado azul, un cuadrado verde, un cuadrado rojo, un cuadrado negro, un cuadrado azul, un cuadrado verde, un cuadrado rojo, etc. ¿cuál es el color del cuadrado 2013 que dibuja?	**26** ¿Cuál es el siguiente número en la secuencia $12, 13, 15, 18, 22, \ldots$?
29 Halla todos los números de dos dígitos que dejan resto 4 cuando dividen a 109.	**30** ¿Cuántas páginas tiene un libro si para escribir los números de sus páginas se utilizaron 59 dígitos?			

Matemáticas vs. pragmatismo: Preece y Heaviside

"La verdadera teoría no requiere del abstruso lenguaje de las matemáticas para ser clara y para ser aceptablemente útil[...] Todo lo que es sólido y substancial en ciencias y útil en las aplicaciones y en la práctica, se ha hecho claro relegando los símbolos matemáticos a su sitio natural de almacenaje... la sala de estudio."

Sir. William Henry Preece: Discurso inaugural como presidente de la Institución de Ingenieros Electricistas (IEE) en 1893.

El siglo XIX fue el siglo del descubrimiento de un nuevo tipo de alquimia: el fenómeno electromagnético y sus increíbles e innumerables aplicaciones. Fue un cambio espectacular que dio lugar entre otras cosas al mundo moderno de las telecomunicaciones: el telégrafo, el teléfono y la radio son consecuencia directa del esfuerzo de muchos científicos e ingenieros por entender la electricidad y el magnetismo como un fenómeno único. El punto nodal de este desarrollo fue la síntesis dada por James Clerk Maxwell, quién en 1865 unificó toda la teoría electromagnética en 20 ecuaciones, simplificadas después a 4 ecuaciones en derivadas parciales por Oliver Heaviside en 1884, e independientemente por Willard Gibbs. En este contexto ocurre nuestra aleccionadora anécdota.

Sir William Henry Preece, el autor de la cita que encabeza esta nota, con una pobre formación matemática y pocos años de educación formal universitaria, era un hombre cuyos conocimientos provenían de la práctica en la industria de las comunicaciones de aquellos días. Ingeniero asesor de la Oficina Postal en 1870, y a partir de 1890 Ingeniero en Jefe de la misma. La Oficina Postal era un monopolio estatal británico que controlaba el telégrafo desde el mismo año de 1870. En esos cargos realiza una 'eficiente' labor de innovación e invención: en la ampliación del telégrafo, la introducción del teléfono, y apoyando las investigaciones de Marconi en la reciente invención de la radio. En 1899, y como punto culminante de su carrera, fue investido caballero con el pomposo y curioso título de *"Caballero comandante de la orden del baño."* Una sola mácula deslustra su carrera. Una mácula que crece con el pasar de los años. Y fue su dogmática negativa a introducir una innovación tecnológica propuesta por Oliver Heaviside: la bobina de carga.

Existía una rivalidad entre estos dos hombres, la cual se exacerba después de que Heaviside publica el 13 de Junio de 1885 un artículo criticando otro publicado tres meses antes por Preece. Preece había obtenido una fórmula errónea con la cual pretendía calcular la máxima distancia que debería tener un circuito telefónico para que un mensaje transmitido no se distorsionara. Basaba su fórmula en un trabajo del célebre William Thomson (Lord Kelvin), donde se hacían algunas suposiciones técnicas para los circuitos telegráficos. Dichas suposiciones no eran aplicables a la situación que estudiaba Preece. No podía entender completamente el trabajo de Kelvin por que no entendía la teoría general electromagnética de Maxwell. Y no entendía a Maxwell por no entender el leguaje imprescindible de las matemáticas con el cual esta teoría se tiene que presentar.

Por su parte Heaviside era un originalísimo matemático autodidacta. Conocía a profundidad la teoría de Maxwell, a punto de simplificarla a sólo 4 bellas ecuaciones usando el lenguage del cálculo vectorial. En un trabajo en 1887 descubrió lo que ahora se conoce como la *condición de Heaviside* y propuso el empleo de bobinas de carga distribuidas uniformemente para corregir la distorsión que ocurre en largas distancias de lineas telefónicas o de cables telegráficos submarinos. Heaviside, demasiado irónico en su crítica al trabajo de Preece, provocó la ira de éste, quien durante algún tiempo usó sus influencias para que no se publicaran los trabajos de Heaviside en la revista *The Electrician*. También impidió durante años, usando su poder de veto en la Oficina Postal Británica, que se pusiera en práctica la idea de las bobinas de carga. Se veía a si mismo como el hombre prágmático, en contraposición a un Heaviside propulsor de teorias inútiles. Pero la ciencia es el sitio menos adecuado para ocultar la verdad usando influencias políticas o de otra índole. Es muy difícil por estos métodos obscurecer durante mucho tiempo el juicio de toda una comunidad de colegas científicos bien entrenados. Heaviside continuó publicando sus trabajos en otras revistas y en libros. En 1891 es nombrado miembro de la *Royal Society*, reconociendo sus logros por la descripción matemática del fenómeno electromagnético. En 1896 recibió una pensión estatal promovida por varios eminentes científicos británicos.

La historia de la patente de la bobina de carga tiene vericuetos interesantes. En 1899, más de diez años después del trabajo de Heaviside, Michael I. Pupin "redescubrió" esas ideas y patentó la bobina de carga en Estados Unidos. Muy poco tiempo después, George A. Campbell, empleado de la empresa AT&T, construyó un circuito telefónico usando bobinas de carga, patentando luego su diseño. A lo que siguió una pelea por la patente entre AT&T y Pupin. ¿Y Heaviside? Nunca patentó su idea. Su propuesta y la llamada *condición de Heaviside*, esencial para saber a que distancia colocar las bobinas, fueron publicadas en revistas y pasaron a ser naturalmente dominio público.

Finalmente AT&T decide comprarle a Pupin su patente a cambio de regalías anuales. Para 1917 Pupin ya había recibido \$455.000, una fortuna para la época. Por su parte AT&T se había ahorrado hasta 1925 alrededor de \$100 millones, con las bobinas podían usar cables con la mitad de la calidad de los que usaban antes. A Heaviside AT&T le ofreció un pago especial que rechazó por aspirar a todo el reconocimiento por dicho invento. La concepción errada de Preece, pragmatismo vs. matemática, tuvo el costo de que los Ingleses desarrollaran su sistema telefónico con un gran atraso respecto a Estados Unidos, y encima tuvieran que pagar regalías a AT&T por el uso de las famosas bobinas. Pero, en algo tenía razón Preece, Heaviside mostró muy poco pragmatismo al no patentar su invento.

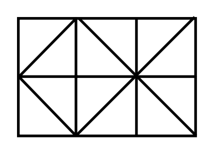
Las ecuaciones de Maxwell simplificadas por Heaviside lucen así:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (Ley de Gauss)} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \text{ (Ley de Gauss para el campo magnético))} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (Ley de Faraday)} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ (Ley de Ampère generalizada).}
\end{aligned}$$

Miguel Méndez
Departamento de Matemáticas, IVIC

ORM

MAYO 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		1 **“No pienses en los fracasos de hoy, sino en el éxito que puede llegar mañana. Te has propuesto una tarea difícil, pero tendrás éxito si perseveras, y encontrarás dicha en la superación de obstáculos.”** Helen Keller (1880 - 1968). Autora, activista política, y oradora sordociega.	**2** Si se sigue escribiendo las letras de la palabra MAYO en cada una de las siguientes casillas, ¿qué letra irá en la casilla 2013? 	**3** ¿De cuantas formas se puede representar el número 30 como la suma de 2 números primos?
6 Juan tiene 20 pelotas, en 4 colores diferentes: amarillo, azul, rojo y verde. Si 17 pelotas no son azules, 5 pelotas son de color verde y 12 no son amarillas. ¿Cuántas pelotas rojas tiene Juan?	**7** Román, Fabián, Laura, Javier y Adriana se encuentran en la misma fila. Roman está detrás de Laura. Fabián está antes de Román y justo después de Javier. Javier está antes de Laura pero él no es el primero en la fila. ¿En qué puesto de la fila está Adriana?	**8** ¿Cuántos números de 2 dígitos tienen la cifra de las decenas menor que la cifra de la unidades?	**9** La suma de los dígitos de 2013 es 6. ¿Cuántos números de 4 dígitos existen tales que la suma de sus cifras es 6?	**10** OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2013 REGIONAL OJM Sábado, 11 de mayo de 2013
13 	**14** En la multiplicación A, B y C representan dígitos diferentes. ¿Cuál es el valor de la suma $A+B+C$? $\begin{array}{rrr} & B & A \\ & \times & 7 \\ \hline C & A & A \end{array}$	**15** ¿Cuál es el resultado de restarle 29 al mayor de los números de dos cifras y luego, al resultado de dicha diferencia dividirla entre el menor número de dos cifras?	**16** OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2013 REGIONAL ORM Jueves, 16 de mayo de 2013	**17** ¿Cuál es la mayor cantidad de ángulos rectos que puede tener un hexágono?
20 Diego tiene una barra de chocolate. Si se come $\frac{1}{3}$ del chocolate luego del desayuno, y $\frac{1}{4}$ de lo que le queda después de almorzar. ¿Qué fracción del chocolate se comió?	**21** Laura tiene 147 caramelos y Luisa tiene 57 caramelos. ¿Cuántos caramelos le debe dar Laura a Luisa para que Laura tenga el doble de caramelos que Luisa?	**22** Julián quería multiplicar un número por 10 pero se equivocó y lo dividió entre 100. Si al final de hacer la operación obtuvo como resultado 600 ¿Cuál sería el resultado si Julián realiza la multiplicación?	**23** Si el área del cuadrado pequeño es 1 cm^2 ¿cuántos triángulos de área 1 cm^2 hay en la figura? 	**24** OLIMPIADA MATEMÁTICA ARGENTINA - OMA - 19a Olimpiada de Mayo Sábado, 25 de mayo de 2013
27 ¿Cuál es el mayor número con todos sus dígitos impares menor que 5000?	**28** Si una pirámide tiene 20 caras ¿cuántos vértices tiene?	**29** Hay muchos números de cinco cifras que son divisibles entre 3, 5 y 8. Si a cada uno de estos números, le calculas la suma de sus cifras, ¿cuál sería la menor suma que obtendrías?	**30** ¿Cuántos números naturales de 3 cifras cumplen que la diferencia entre dos de sus cifras, cualesquiera, es menor que 2?	**31** 3 manzanas y 2 naranjas pesan 255 gramos y 2 manzanas y 3 naranjas pesan 285 gramos. Si todas las manzanas tienen el mismo peso, y todas las naranjas pesan igual. ¿cuál es el peso de una manzana y una naranja?

Un juego de palabras

Consideraremos un juego matemático que consiste en escribir una lista de palabras usando los símbolos $\{a, b, c\}$. Comenzamos con una palabra inicial dada, y la ponemos de primera en la lista. Cada vez que ponemos una palabra en la lista creamos la siguiente según las instrucciones a continuación: si la palabra comienza con a, le pegamos al final la expresión *bab*, y luego borramos los primeros tres símbolos de la palabra resultante. Si la palabra comienza con b, agregamos *abba* al final, y borramos los tres primeros símbolos de la palabra resultante; finalmente, si la palabra comienza con c, agregamos al final *cab* y borramos los primeros tres símbolos.

Comencemos con la palabra *babccba*. Como su primer símbolo es b, agregamos *abba* para obtener *babccbaabba*, y luego borramos las primeras tres letras. Nos queda *ccbaabba*, que comienza con c, entonces la tercera regla nos indica que debemos agregar *cab* y borrar obteniendo así *aabbacab*, luego, aplicando la primera regla, obtenemos *bacabbab*, y a continuación *abbababba*, y continuendo el juego, *ababbabab*, *bbababbab*, *babbababba*, *bababbaabba*, así indefinidamente.

Veamos ahora otro ejemplo que se comporta de manera diferente. Usemos esta vez los símbolos $\{0, 1\}$ y las reglas expresadas así: si la palabra comienza con 0, agregue al final 01 y borre los primeros tres símbolos. Si la palabra comienza con 1, agregue al final 10 y borre los primeros tres símbolos. Comencemos el juego con la palabra 100101. Como ésta comienza con 1, aplicamos la segunda regla y obtenemos 10110, luego, aplicando de nuevo la segunda regla, obtenemos 1010, después 010, ahora aplicando la primera regla, 01, luego, 1, y al aplicar la segunda regla a esta palabra, borramos todo y el juego se detiene.

Estos juegos, que podemos llamar sistemas de etiquetamiento, fueron inventados en 1921 por el matemático y lógico Emil Post, en la universidad de Princeton. Sin embargo, la primera publicación que hizo sobre estos sistemas, que llamó Tag Systems en 1943. Para simplicar la descripción de estos sistemas y a la vez dar una definición más formal de los mismos, decimos que un sistema de etiquetamiento está dado por un conjunto finito de símbolos $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, un número natural n y un conjunto finito de pares (a_1, A_1), (a_2, A_2), …, (a_m, A_m), dónde cada A_i es una palabra específica escrita con los símbolos del conjunto dado, y una palabra inicial A_0. Las reglas o instrucciones para operar el sistema, generaándo así una lista de palabras son:

Primera regla: Ponga W igual a la palabra inicial A_0 y vaya a la segunda regla.

Segunda regla: Copie W en la lista. Mire el primer símbolo de W, si ese símbolo es a_i, pegue A_i a la derecha de W y luego borre los primeros n símbolos de la palabra que resulte. Ponga ahora W igual a la palabra obtenida así y vaya a la tercera regla.

Tercera regla: Si W no tiene símbolos, es decir, si se borró todo, vaya a la cuarta regla. En caso contrario, verifique si W es igual a alguna palabra que fue puesta antes en la lista, si es así, vaya a la cuarta regla, y si no, vaya a la segunda regla.

Cuarta regla: Deténgase.

En algunos casos es posible caer en un ciclo, y por eso en la tercera regla se incluye verificar si se repite una palabra obtenida anteriormente. Damos un ejemplo. Usemos otra vez los símbolos $\{a, b, c\}$, también con $n = 3$ pero con los pares $(a, baab)$, (b, aba) y (c, cb) y la palabra inicial *baccab*. Ponemos a funcionar el sistema y obtenemos:

baccab, *cababa*, *abacb*, *cbbaab*, *aabcb*, *cbbaab*,

y vemos que acá se repite la cuarta palabra de la lista, y por lo tanto la tercera regla nos ordena parar.

El lector que quiera invertir tiempo jugando con estos sistemas puede considerar hacerlo con el sistema dado por $\{0, 1\}$, $n = 3$, $\{(0, 00), (1, 1101)\}$ y la palabra inicial 10010010010010010010100. Advertimos que ese es uno de los primeros sistemas que Post estudió, y que hasta el día de hoy no se sabe si eventualmente se detiene o continúa indefinidamente. Los primeros pasos de la lista generada por este sistema se pueden representar por la siguiente figura, poniendo un cuadrado negro donde va un 1 y uno blanco donde va un 0.

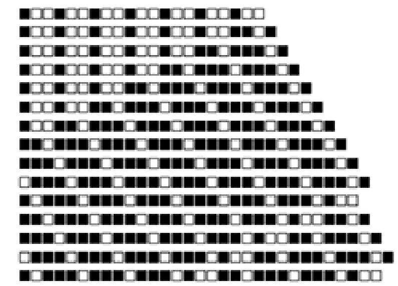


Figura $\{0, 1\}$, $n = 3$, $\{(0, 00), (1, 1101)\}$, 10010010010010010010100.

De este modo nos vemos enfrentados al problema siguiente: dado un sistema de etiquetamiento, queremos determinar por algún método si el sistema se detiene o continúa indefinidamente, es decir, si para o no.

Lo primero que uno trataría de hacer es poner a funcionar el sistema y esperar a que pare. Si esto ocurre, semanas o años después, uno responde que si para. Pero nunca vamos a poder responder "no" en caso contrario. Por más que esperemos, si el sistema no para no lo vamos a saber nunca. Por lo tanto este método no sirve para resolver el problema.

Lo que queremos entonces es un procedimiento, un algoritmo, que haga el siguiente trabajo: dado un sistema de etiquetamiento, usamos el algoritmo para analizarlo y determinar en una cantidad finita de tiempo si el sistema para o no.

Obsérvese que si un sistema tiene número n mayor que el largo de todas las A_i, el sistema va a detenerse, ya que en cada paso borramos más símbolos que los que agregamos. Entonces en este caso sabemos de antemano que el sistema se detiene. En cambio, si el largo de cada A_i es mayor que n, en cada paso obtenemos una palabra más larga que la anterior, y el sistema funcionará indefinidamente sin detenerse. El problema está entonces en saber que ocurre cuando no se tiene ninguna de estas dos situaciones, como ocurre en los ejemplos presentados anteriormente. Puede que para algunos lectores resulte una sorpresa saber que se ha demostrado que no existe ningún algoritmo, ninguna máquina o procedimiento efectivo que permita responder si el sistema para o no.

Se dice por eso que el problema es indecidible. Problemas como éste, que resultan indecidibles por métodos computacionales, constituyen un tema importante en el estudio de la computación teórica y han dado lugar al desarrollo de conceptos y teorías de sumo interés.

Carlos Augusto Di Prisco
Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales,
Invesigador Emérito del IVIC

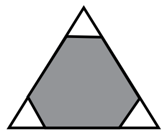
ORM

JUNIO 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes

3

4 A un triángulo equilátero de 87 cm de perímetro se le extraen 3 triángulos, también equiláteros, de 7 cm de lado, como en la figura. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?



5 Se tienen 108 chocolates y 180 caramelos. Se quieren distribuir en bolsas de tal forma que una bolsa sólo tenga chocolates o caramelos y todas las bolsas tengan la misma cantidad de chocolates o caramelos. Si se quiere usar la menor cantidad de bolsas ¿cuántas unidades de chocolate o caramelos debe tener cada bolsa?

6 ¿Cuál es el menor número que multiplicado por 60 da como resultado un cuadrado perfecto?

7 En 13 números consecutivos se tienen 7 números pares y 5 múltiplos de 3. ¿Cuántos, de esos 13 números, son múltiplos de 6?

10 Si dibujas 4 circunferencias en una hoja de papel, ¿cuál es la mayor cantidad de puntos de intersección que puedes tener?

11 ¿Cuál es el triple de la mitad de 18?

12 El cuerpo geométrico está formado por paralelepípedos de igual forma y peso. Si el peso de todo el cuerpo es de 280 gramos, ¿cuánto pesa cada paralelepípedo?

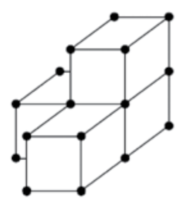
13 Si el dividendo es 100 el resto es 4 y si el dividendo es 90 el resto es 18. ¿Cuál es el divisor común?

14 OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2013
Final Nacional OJM
Sábado, 15 de junio de 2013

17 Cuatro adultos y dos niños deben cruzar un río en una canoa en la que sólo cabe un adulto o dos niños a la vez. No cabe un adulto y un niño juntos. ¿Cuál es el número mínimo de veces que debe cruzar la canoa para transportar a todas las personas de un lado al otro del río?

18 Con los números 1, 3 y 5 se pueden construir 6 de tres dígitos. ¿Cuántos de esos 6 números son primos?

19 Luis construye un cuerpo geométrico con palitos y pelotas de plastilina como se muestra en la figura. ¿Cuántas pelotas de plastilina usa Luis?



20 Una clase con 36 estudiantes salen de paseo. Para cruzar una calle lo hacen en parejas. Si la maestra hace la mitad de las parejas con un niño y una niña, y la otra mitad con dos niños. ¿Cuantos niños hay en la clase?

21 XV OMCC
Managua, Nicaragua,
22 - 30 de junio 2013.

24 **"Siempre ten en mente que tu propia resolución para tener éxito es más importante que cualquier cosa."**
Abraham Lincoln (1809 - 1865)
Político, Presidente de los Estados Unidos.

25 Una rana necesita 5 saltos para recorrer la misma distancia que un conejo recorre en 2 saltos. El conejo necesita 4 saltos para recorrer la misma distancia que un canguro en un salto. ¿cuántos saltos necesita la rana para recorrer la distancia que recorre el canguro en 4 saltos?

26 Verónica compró galletas en la cantina que costaban Bs. 7. Si ella pagó con un billete de 50 y le devolvieron Bs. 8 ¿cuántas galletas compró Verónica?

27 En una granja se tiene que la razón entre la suma de los corderos y las vacas, y la suma de los corderos las vacas y las gallinas es 5:7. También se conoce que la razón entre el número de corderos y el número de corderos menos el numero de vacas es 4:3. Si hay 40 vacas entonces ¿cuántos corderos hay?

28 OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2013
Final Nacional ORM
Sábado, 29 de junio de 2013

Operador: Del latin operātor-ōris, el que hace

A Mischa Cotlar, in memoriam, en el centenario de su nacimiento.

Podemos pensar que un operador es una suerte de mecanismo que opera sobre ciertos objetos, los transforma y produce nuevos objetos. Hay operadores por doquier a nuestro alrededor: allí donde ocurre una **transformación**, se esconde un **operador**. Ello no es del todo cierto pero sirve como punto de partida del recorrido que se pretende registrar aquí. Un recorrido que tiene en la palabra $\boxed{\text{transformación}}$ la señal para ponernos en camino y en el movimiento como tal su primera estación.

Primera estación. Imaginemos que un objeto se mueve y nosotros observamos su movimiento. Pensemos en el objeto como un punto que se desplaza desde una posición inicial A en el instante de tiempo $t = 0$ hasta su posición final B en el instante $t = T$. En cada instante entre $t = 0$ y $t = T$ el punto tiene una velocidad instantánea, interpretada como la tasa de cambio de la función-posición respecto a la variable-tiempo. A su vez, la velocidad instantánea varía dependiendo del instante de tiempo considerado y es, por tanto, otra función del tiempo. El *mecanismo* que asocia la función-velocidad a la función-posición o, más generalmente, la función $f'(t)$ a cada función $f(t)$, es un operador. De hecho un operador básico del Análisis Funcional: el **operador diferencial**. El operador diferencial actúa sobre la función $f(t)$ y produce como resultado la función $f'(t)$, llamada la **derivada** de f. La derivada es un concepto *local*, es decir, se calcula para cada función $f(t)$ en cada $t = a$ para a dado. El operador diferencial es, en cambio, un concepto *global*, se aplica a todas las funciones que son susceptibles de ser transformadas por el operador, acepta una de tales funciones como entrada y produce otra como salida. Reunir en un mismo "lugar", lo que en Matemáticas se conoce bajo el nombre genérico de $\boxed{\text{espacio}}$, las funciones sobre las que opera el operador diferencial y aquellas que resultan de aplicarles el operador, proveer al espacio de cierta estructura, de manera tal de poder tratarlo, y estudiar el comportamiento del operador en el marco de trabajo así establecido, nos lleva a la segunda estación de nuestro recorrido.

Segunda estación. A los espacios queremos darles una estructura que nos permita realizar con los objetos que en ellos viven, llamados **vectores**, "operaciones" similares a las que realizamos con los números. Obtenemos así un **espacio lineal**. Un modelo sencillo de un tal espacio lineal es el espacio bidimensional o plano. Una hoja de papel que imaginamos infinita sirve bien al propósito de interpretar dicho espacio y una de cualquier tamaño vale para representarlo. La representación del espacio es el sistema coordenado rectangular, el cual identifica de forma biunívoca cualquier punto del plano con un par ordenado de números reales. Es decir, en el modelo cartesiano, el espacio, que se suele indicar por $\mathbb{R}^2$, tiene como vectores los pares de números reales: $v = (x, y)$, x, y números reales. La estructura lineal o algebraica está dada por las operaciones de suma de vectores:

$$v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \overset{\text{suma}}{\longmapsto} v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

y de homotecia:

$$v = (x, y), a \text{ número real} \overset{\text{homotecia}}{\longmapsto} av = (ax, ay).$$

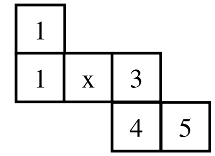
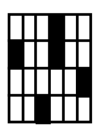
No hay razón alguna para restringirnos al mundo bidimensional de $\mathbb{R}^2$, en particular, porque en nuestro día a día nos movemos en un mundo tridimensional. Más aún, dado que la Matemática es el arte de la imaginación (basada en la lógica) o, parafraseando a Albert Einstein, *la poesía de la razón*, bien podemos pensar en dimensiones que trasciendent el alto-ancho-largo e instalarnos cómodamente en $\mathbb{R}^n$, donde n es el número natural que más nos guste. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ son n-tuplas ordenadas de números reales y la estructura lineal o algebraica con la que equipamos a $\mathbb{R}^n$ es similar a la de $\mathbb{R}^2$. Las transformaciones que preservan la estructura lineal de $\mathbb{R}^n$ son los **operadores lineales**. El modelo para representar un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ es una matriz de n filas y n columnas. Manipular matrices de forma rutinaria para resolver sistemas lineales de ecuaciones es labor que los estudiantes aprenden desde sus primeros encuentros con el Álgebra. La técnica, sin embargo, es tan vieja que ya la usaban los babilones en el 300 A.C. ¿Por qué estacionarnos en el análisis de sistemas lineales de n ecuaciones y no aventurarnos a considerar sistemas lineales de $\boxed{\text{infinitas}}$ ecuaciones? Un paso que nos conduce a la tercera y última estación de nuestro recorrido.

Tercera estación. Los espacios $\mathbb{R}^n$ tienen, además de la estructura lineal, una "geometría" permitiéndonos calcular longitudes y medir ángulos. *Una* longitud del vector $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está dada por $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. La fórmula es la versión n-dimensional del Teorema de Pitágoras, en el léxico matemático, *una* **norma**. En el contexto de esta norma, dos vectores $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son ortogonales si $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0$. La expresión a la izquierda de la igualdad es clave para proveer a $\mathbb{R}^n$ de una geometría. La geometría con la que hemos equipado a $\mathbb{R}^n$ generaliza a más dimensiones la Geometría Euclídea, de allí que al espacio se le llame **espacio euclídeo n-dimensional**. Un primer acercamiento a $\mathbb{R}^\infty$ nos lleva a pensar en tuplas ordenadas infinitas $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ de números reales. Con ellas queremos calcular distancias, medir ángulos y aproximar, lo cual nos conduce a considerar unicamente aquellas tuplas $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ tales que las sumas infinitas $x_1^2 + x_2^2 + \ldots$ miden efectivamente longitudes. Por ejemplo, la tupla cuyas coordenadas son todas 1 la descartamos pero la tupla cuyas coordenadas son todas 0 a partir de cierta posición j la admitimos. Obtenemos así un espacio al que podemos proveer de una estructura lineal y geométrica: el espacio ℓ^2 real. Las operaciones de suma de vectores y de homotecia se definen coordenada a coordenada como en $\mathbb{R}^n$, y son compatibles con la condición impuesta a los vectores de ℓ^2, en el sentido que el infinito de los números naturales no ha de asustarnos, porque esas operaciones son legítimas y las podemos realizar con el mayor desparpajo. En ℓ^2 actúa un operador al que se le han dedicado estudios profundos: el operador de traslación o **shift**. En nuestro recién estrenado espacio, el ℓ^2 real, el "forward" shift o traslación hacia adelante opera sobre cualquier vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ y produce el vector $(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$. Este operador, en apariencia modesto, es, entre los "que hacen", uno que hace bien ... y hace mucho.

Stefania A. M. Marcantognini
Departamento de Matemáticas, IVIC

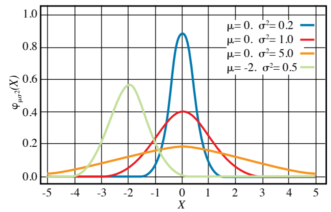
OJM

JULIO 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 Marcos escribió en su cuaderno todos los números de 3 dígitos, mientras que Ana solamente escribió los números de 3 dígitos que son múltiplos de 100. ¿Cuántos números más escribió Marcos que Ana?	**2** Para cada número de dos dígitos se calcula el producto de sus dígitos y luego la suma de los dígitos del producto. ¿Cuál es la mayor suma que se puede obtener?	**3** ¿Cuántos números de dos dígitos hay tales que sean divisibles por dos y la suma de sus dígitos sea impar?	**4** Luego de armar el cubo, ¿cuál número queda en la cara opuesta a la letra **X**? 	**5** **"La energía y la perseverancia conquistan todas las cosas."** Benjamin Franklin (1706 - 1790) Político, científico e inventor.
8 ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los dígitos 0 y 7?	**9** Pablo y Pedro tienen juntos Bs. 180, Pedro y Juan tienen Bs. 160 entre los dos, Juan y Pablo tienen Bs. 140 entre los dos. ¿Cuántos bolívares tienen los tres juntos?	**10** Si 9 tortas cuestan menos de Bs. 100, y 10 tortas cuestan más de Bs. 110 ¿Cuál es el menor valor posible de cada torta?	**11** En una finca hay 100 animales, entre gallinas y caballos. Si se cuentan 260 patas entre los 100 animales, ¿cuántas gallinas hay en la finca?	**12** ¿Cuántos cubos de 2 cm × 2 cm × 2 cm se necesitan para construir un cubo de 8 cm × 8 cm × 8 cm?
15 En el país maravilla existen 3 pueblos: A, B, y C. Del pueblo A a B existen 6 caminos directos que los conectan mientras que de B a C hay 4 caminos directos. ¿Cuántas maneras hay de llegar de A a C pasando por B?	**16** El producto de 2 números naturales es 10, ¿cuál es el menor valor posible que puede tomar la suma de esos 2 números?	**17** Verónica ayuda a su madre a hacer ponquecitos. Si Verónica hace 4 ponquecitos en el mismo tiempo que su madre hace 7 ponquecitos, y en total se hicieron 110 ponquecitos. ¿Cuántos ponquecitos hizo Verónica?	**18**  54a IMO Santa Marta, Colombia, 18 - 28 de julio 2013.	**19** José tenía 6 años mas que Rosa el año pasado. Este año José tiene el doble de edad que Rosa. ¿Cuál es la edad de José?
22 ¿Cuántas parejas de números naturales existen tales que su producto es 100?	**23** ¿Cuántos rectángulos blancos se deben pintar de negro para que la cantidad de rectángulos negros sea la mitad de la cantidad de rectángulos blancos? 	**24** **"Aprendí que lo difícil no es llegar a la cima, sino jamás dejar de subir."** Walt Disney (1901 - 1966). Productor, director, guionista y animador fundador de The Walt Disney Company.	**25** Rafael y su padre cumplen años el mismo día. Si la edad de Rafael es un onceavo la edad de su padre, pero en seis años la edad del padre es 5 veces la edad de Rafael, ¿cuál es la edad actual de Rafael?	**26** María tiene 24 frutas. Si $\frac{1}{6}$ son manzanas, $\frac{1}{3}$ son naranjas y el resto son mangos, ¿cuántos mangos tiene María?
29 En un salón de clase de 35 alumnos se tiene que hay 4 varones por cada 3 hembras. ¿Cuántas hembras hay en el salón de clases?	**30** ¿Cuál es el menor número de tres dígitos tal que sumado con un número de 4 dígitos da como resultado 10500?	**31** Ana tiene menos de 145 caramelos. Si ella sólo hace grupos de 4, 6 ó 9 caramelos siempre quedan dos de ellos sin grupo. ¿cuántos caramelos tiene Ana como máximo?		

Datos, incertidumbre y la campana de Gauss

Casi todos hemos oído hablar de la *campana* o *curva de Gauss*, la característica distribución de frecuencias de las variables aleatorias normales. Sin embargo, es menos lo que conocemos sobre la fascinante historia de su origen, íntimamente ligada a la necesidad de una herramienta que permitiese *ajustar* curvas a datos observados y más generalmente a *modelar* la incertidumbre.



Desde principios del siglo XVIII varios problemas relacionados con la modelización y cálculo de las posiciones de los cuerpos celestes interesaban a la comunidad científica, hasta el punto de asegurar importantes recompensas monetarias a quien lograse establecer los modelos más precisos. Tres de los más famosos eran: medir las libraciones u oscilaciones de la luna, la no periodicidad de las diferencias en las posiciones de Júpiter y Saturno y el problema de determinar la longitud de un objeto en altamar a fin de evitar los constantes naufragios (la latitud podía determinarse a partir de la posición relativa con respecto a ciertos cuerpos celestes fijos). Además de las leyes de Newton y las ecuaciones de Kepler, se contaba con una colección importante de observaciones empíricas realizadas desde la antigüedad.

El problema en ciernes consistía en hallar una serie de coeficientes o parámetros que puestos en las ecuaciones previstas por los modelos teóricos señalados permitiesen predecir adecuadamente las observaciones. El problema que se planteaba era doble: por un lado la precisión de las observaciones, siempre sujetas a un cierto grado de error, y por otro a la existencia de un mayor número de observaciones que de incógnitas. Desde el punto de vista práctico, dada una colección de m incógnitas y n observaciones con $m < n$, se trataba, o bien de desechar una cierta cantidad de observaciones, pero entonces ¿cuáles?, o de usar toda la información en cuyo caso la solución nunca sería exacta sino aproximada.

A mediados del siglo XVIII era práctica común el promediar observaciones "semejantes" (tomadas desde la misma posición, con un mismo instrumento y por un mismo sujeto) y reducir de este modo el número de ecuaciones hasta lograr la cantidad requerida de ecuaciones y encontrar soluciones exactas. Pero, ¿qué hacer cuando la naturaleza de las observaciones era diferente, tomadas en diferentes épocas o por diferentes investigadores?

Una respuesta *ad hoc* fue dada por el connotado astrónomo Tobías Mayer (1723-1762) en el estudio de las libraciones de la luna publicado en 1750. Mediante simplificaciones astutas logró reducir el sistema de ecuaciones a la determinación de tres coeficientes. Contaba para ello con 27 observaciones que usó agrupándolas de acuerdo al tamaño de la que consideraba la variable más importante. Mayer observó que una agrupación adecuada de las ecuaciones hace que se reduzca el error *en promedio* a medida que hay más datos y conjeturó una relación inversa lineal (hoy en día se sabe que en realidad es la raíz cuadrada) entre el número de observaciones y el error.

El método de Mayer es interesante pues centra su atención en el comportamiento global de todos los errores y no únicamente en el máximo error cometido. Pero, fue Pierre Simon Laplace (1749-1827) el primero en estudiar en detalle el problema de la distribución de frecuencias de los errores. Su análisis profundo del comportamiento de los errores empíricos lo lleva a publicar en 1774 y 1778 dos *leyes de errores*: la distribución Laplaciana (o doble exponencial) y la segunda ley según la cual la frecuencia relativa de los errores disminuye como la exponencial negativa del cuadrado: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, que no es otra sino la famosa campana de Gauss, con centro cero y precisión 1. Más aún, sus análisis lo llevan a conjeturar que una buena solución a un problema sobredeterminado, con más ecuaciones que incógnitas, es aquella en la cual la suma de todos los errores es cero y la suma de sus valores absolutos sea lo más pequeña posible. El método era muy efectivo, pero los cálculos eran en general muy engorrosos para ser prácticos.

El siguiente paso en esta evolución fue la aparición de un algoritmo computacionalmente sencillo para llevar a cabo esta tarea de encontrar soluciones que balancearan los errores: el método de mínimos cuadrados, es decir, aquella solución que minimizara la suma de los errores al cuadrado y que a diferencia de los algoritmos anteriores, con un poco de cálculo elemental resultaba de muy sencilla aplicación. Bastaba para ello igualar a cero ciertas ecuaciones lineales en los parámetros, que tomaron el nombre de ecuaciones *normales*. La historia matemática sugiere que fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855) el primero en plantear esta solución en 1795 y aplicarla con éxito a la determinación de la trayectoria de un pequeño cuerpo celeste recién descubierto, Ceres, en 1801. Sin embargo, el primero en publicar el método fue Adrien-Marie Legendre (1752-1833) en 1805 en su obra "Nouvelles methodes pour la détermination des orbites des comètes, etc.", provocando que Gauss al sentirse plagiado publicara por su parte en 1809 el tratado "Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium" en donde además de atribuirse la autoría del método establece una relación importante entre la curva de Gauss y el método de mínimos cuadrados.

El razonamiento de Gauss seguía el siguiente esquema: supongamos que se tienen n observaciones, se quiere determinar una cantidad de interés V, que para ello se usa el método de mínimos cuadrados y se sabe que la solución es la media de las observaciones. Partiendo de las ideas originales de Laplace sobre la distribución de los errores, Gauss se planteó el problema a la inversa tratando de dilucidar cuál sería entonces la distribución apropiada para los errores. Genialmente especuló que la media debía ser el valor más probable, o en otras palabras, el máximo de esta distribución de errores desconocida. Llamando $\phi(e)$ a la distribución de frecuencias buscada, para acotar el problema introdujo una serie de suposiciones: el máximo valor de ϕ ocurre en 0, ϕ es simétrica, debe decrecer monótonamente a cada lado del cero y debe ser cero (o casi cero) para valores grandes.

Con un poco de cálculo, encontró la solución buscada: $\phi(e) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2e^2}$, donde h es el nivel de precisión del error. Luego procedió a mostrar con los mismos argumentos que podía generalizarse esta idea para demostrar que la única ley con las características antes señaladas cuyo máximo ocurría en las soluciones obtenidas por el método de mínimos cuadrados era la distribución Gaussiana. Gauss la llamó la ley de las ecuaciones normales en referencia a las ecuaciones que aparecen en el cálculo de mínimos cuadrados. Un siglo y algo más tarde Pearson acuñó el término normal, para acabar con la histórica polémica entre si era Gauss o Laplace el autor de la curva.

Ahí no termina la historia. En 1810, Laplace publicó su primera versión del Teorema del Límite Central. El mismo establecía que, independientemente de su distribución de origen, discreta o continua, la distribución de frecuencias del promedio aritmético de cualquier variable aleatoria centrada (alrededor de su media) y normalizada por la raiz cuadrada de su varianza converge a la ley de los errores. Este resultado está a la base de innumerables aplicaciones que se usan cotidianamente y que abarcan desde los criterios de "normalidad" de los exámenes de laboratorio hasta la precisión reportada en las encuestas electorales.

Carenne Ludeña
Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

OJM

AGOSTO 2013

1 Si la suma de 2 números naturales consecutivos es 2013, ¿cuál es el mayor de los números?

2 ¿Cuál es el producto de los dígitos del menor número natural cuya suma de dígitos es 12?

5 ¿Cuántos naturales menores que 70 son divisibles por 3 números primos diferentes?

6 En el cuadrado mágico faltan 5 números por ser colocados de modo que la suma de todas las filas, columnas y diagonales sea la misma. ¿Cuánto vale X?

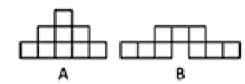
15		35
50		
25	X	

7 Si A, B y C representan dígitos diferentes ¿Cuál es el valor de C?

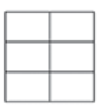
$$\begin{array}{r} A \\ +\quad B \\ C \\ \hline AB \end{array}$$

8 Después de este año 2013, ¿cuál es la menor cantidad de años que debe pasar para que el producto de los dígitos del año sea 2?

9 Los cuadraditos de las figuras A y B son todos iguales. El perímetro de la figura A es 48 cm. ¿Cuál es el perímetro de la figura B?



12 Un cuadrado tiene un área de 144 cm^2. Supongamos que se divide en 6 rectángulos iguales. ¿Cuánto vale el perímetro de cada rectángulo?

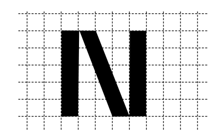


13 El promedio de tres números es 2013, si uno de ellos es 2014. ¿Cuál es la suma de los otros dos números?

14 Si se escriben los números del 1 al 100 todos seguidos, ¿cuál es el dígito que más se repite?

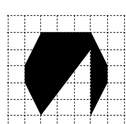
15 ¿Cuánto le falta a 98 centésimas para ser 1000 milésimas?

16 Si el lado de cada cuadrado pequeño es de longitud 1 cm, ¿cuál es el área de la región de color?



19

20 Si el lado de cada cuadrado pequeño es de longitud 1 cm, ¿cuál es el área de la región de color?



21 El cociente de dos números es 4 y su diferencia es 39. ¿Cuál es el menor de los dos números?

22 Luisa va a un concierto donde se presentan 3 solistas, 3 duetos, 5 tríos y 2 cuartetos. ¿Cuántos artistas se presentaron en el concierto?

23 ¿Cuál es el número máximo de diagonales que puedes dibujar en un pentágono?

26 ¿Cuáles números de tres cifras tienen la propiedad de ser divisibles entre 25 y además la cifra de las centenas sea $\frac{2}{5}$ de las cifras de las unidades?

27 El producto de siete números naturales consecutivos, todos menores que 25, termina exactamente en dos ceros. ¿Cuántos de tales productos existen?

28 Samuel escoge un número de tres dígitos y un número de dos dígitos. Si la diferencia entre los números es 989, ¿cuánto es la suma de los dos números?

29 La cabeza de un Caimán del Orinoco es un tercio de la longitud de su cuerpo. La cola es tan larga como la cabeza y el cuerpo juntos. Si la longitud de la cabeza de un caimán es de 60 cm, ¿cuánto mide el animal?

30 ¿Cuántas horas hay en la mitad de la tercera parte de un cuarto de día?

El Paseo al Azar y Teorema del Escrutinio

Un modelo probabilístico muy utilizado en las aplicaciones es el conocido como Paseo al Azar, otros prefieren darle el nombre de Marcha Aleatoria. La versión más simple consiste en pensar un móvil que se desplaza un paso hacia la derecha o la izquierda en cada unidad de tiempo. Ahora bien, para seleccionar hacia qué lugar se dirige para dar cada paso se tira una moneda no cargada y si sale cara el móvil va hacia la derecha en caso contrario a la izquierda.

La noción de probabilidad que usaremos es la del espacio equidistribuido. Esto es, si consideramos Ω un conjunto de un número finito de elementos que será el conjunto de todos los eventos y $\#A$ denota el número de elementos del conjunto A, entonces se define la probabilidad de ese conjunto como $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$. De esta forma si denotamos como ε_k el paso dado en el tiempo k entonces $\varepsilon_k = \pm 1$ y además la probabilidad de que ε_k sea 1 ó -1 será igual a $\frac{1}{2}$ respectivamente (existen dos resultados posibles cara o sello y sólo un resultado actual salió cara o salió sello), recordar que tiramos una moneda equilibrada cada vez que avanzamos. Así, si denotamos por S_n la distancia recorrida hasta el tiempo n, entonces $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ y cada recorrido posible constituye una n-upla: $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de unos y menos unos. El número total de n-uplas posibles es 2^n. Luego la probabilidad de una n-upla en particular es $(\frac{1}{2})^n$.

Si sabemos que hasta el tiempo n hay p unos y q menos unos y empezamos en el origen, se tiene la relación $n = p + q$ y $S_n = p - q$. Entonces si queremos calcular la probabilidad de todas las trayectorias que terminan en $p - q$, es decir la probabilidad del conjunto $\{S_n = p - q\}$, debemos dividir número de casos favorables sobre el número de casos posibles. El número de casos favorables resulta equivalente a seleccionar p unos en un total de $n = p + q$ sitios. Sabemos que esta cifra es igual a $\binom{p+q}{p}$. La definición de probabilidad con la que estamos trabajando demanda que dividamos el número anterior por el número de casos posibles que es como vimos 2^n, lo que nos da $\mathbb{P}\{S_n = p - q\} = \binom{p+q}{p}(\frac{1}{2})^{p+q}$. Como podemos observar, basta con calcular el número de posibles caminatas efectuadas por el móvil sabiendo que empieza en cero y termina en $x = p - q$, lo que nos da el número combinatorio.

Existe una aplicación muy simple del Paseo al Azar al escrutinio de una votación entre dos candidatos. Supongamos que los votos totales de los candidatos A y B son p y q, respectivamente. Supongamos que p es mayor que q y queremos saber cuál es la probabilidad de que en un conteo de votos el resultado para el candidato A siempre sea mayor que el del candidato B. Esto quiere decir que debemos ver el conjunto de trayectorias tales que $\{S_1 = 1, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = p - q\}$. Una aplicación muy simple del principio de reflexión de D. André (ver el enunciado más adelante) dice que esta probabilidad es igual a $\frac{p-q}{p+q}$. Por ejemplo si $q = \frac{1}{3}p$ entonces este número es $\frac{1}{2}$. Esto quiere decir que la mitad de los conteos posibles darán siempre ganador a A durante todo el proceso de escrutinio. Si p es mucho mayor que q esta probabilidad aumenta considerablemente.

Pasemos entonces a enunciar el principio de reflexión. Introduzcamos previamente una representación gráfica del paseo. Para esto en un plano de coordenadas ubicamos a los puntos (k, S_k) y los unimos por rectas creando así una poligonal.

Principio de reflexión de D. André:
El número de trayectorias de $(0, k)$ hasta (n, x) que tocan o cruzan el eje de coordenadas horizontal es igual al número de trayectorias que van desde $(0, -k)$ hasta (n, x).

Demostración: Razonamos de la siguiente manera: si $x > 0$, $k > 0$, cada trayectoria sin restricciones desde el "origen reflejado" $(0, -k)$ hasta (n, x) debe pasar en algún punto por el eje horizontal (ver Figura 1). Partiendo de este punto hacia atrás podemos reflejar la trayectoria y ésta saldrá de $(0, k)$ y tocará al menos una vez el eje horizontal. Lo que nos da la igualdad del número de trayectorias.

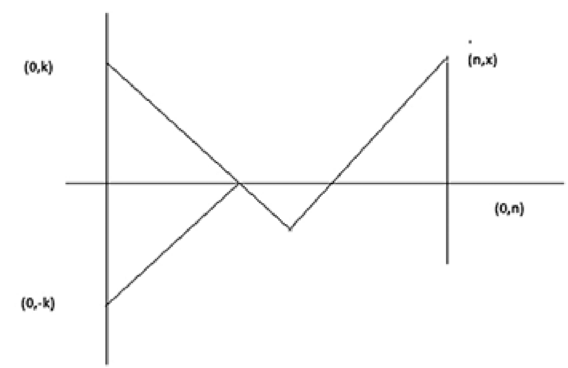


Figura 1: Trayectoria reflejada.

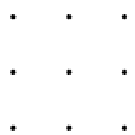
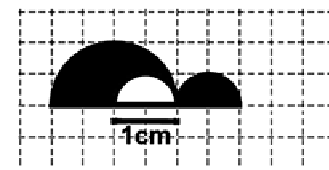
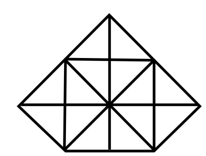
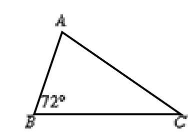
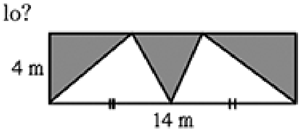
Referencias

1. Willian Feller. Una introducción a la teoría de la probabilidad y sus aplicaciones. Limusa (1973).
2. J.R. León y Joaquín Ortega. Paseo al azar y movimiento Browniano. Libro de la II Escuela Venezolana de Matemática (1989).
3. I. Iribarren, J.D. Mujica, H. Rago, A ciencia cierta. http://blogacienciacierta.blogspot.com/2007/11/paseo-al-azar.html

José R. León R.
Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

OJM

SEPTIEMBRE 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 ¿Cuántos triángulos acutángulos con vertices en los puntos de la figura puedes construir? 	**3** Si se triplica el número 4567, ¿cuál es el dígito que aparece en las unidades del número resultante?	**4** ¿Cuántas veces están 75 centésimas en 150 décimas?	**5** Calcular el área de la región sombreada 	**6** Si $S = 6 \times 10000 + 5 \times 1000 + 4 \times 10 + 3 \times 1$, ¿cuál es el valor de S?
9 Si una máquina produce 150 artículos en un minuto, ¿cuántos artículos producirá en 10 segundos?	**10** Se tiene un campo rectangular de 80 m. de largo y 60 m. de ancho. Si se quieren colocar postes alrededor del mismo en las esquinas y cada 10 m, ¿cuántos postes serán necesarios para completar todo el perímetro del campo?	**11** Dos números suman 32. Si uno de los números es -36, ¿cuál es el otro número?	**12** Carlos planta diez árboles cada tres minutos. Si continúa plantando a la misma tasa, ¿cuánto se demorará para plantar 2500 árboles?	**13** El patrón de las figuras △●□▲○ se repite en la secuencia △.●.□.▲.○.△.●.□.▲.○. ... La figura en la posición 214 de la secuencia es:
16 Un número tiene 5 dígitos. Si el producto de los dígitos es 100, ¿cuál es la suma de sus dígitos?	**17** Un cubo tiene volumen 125 cm^3. ¿Cuál es el área de una de las caras del cubo?	**18** Juan y María juegan un juego de dos personas en el que el ganador gana 2 puntos y el perdedor pierde 1 punto. Si Juan ganó exactamente 3 juegos y María tuvo al final 5 puntos, ¿cuántos juegos se jugaron en total?	**19** ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura? 	**20** XXVIII OIM Panamá, 20-28 de septiembre de 2013.
23 Cada una de las 12 aristas de un cubo se colorea de rojo o de verde. Cada cara del cubo tiene al menos una arista roja. ¿Cuál es el menor número de aristas rojas que puede haber en el cubo?	**24** 10 puntos se encuentran espaciados equitativamente alrededor de un círculo. ¿Cuántos cuerdas diferentes se pueden formar al unir cualquiera 2 de esos puntos?	**25** Cada vez que una barra de jabón es utilizada, su volumen decrece en un 10 %. ¿Cuál es el mínimo número de veces que una barra nueva de jabón debe ser usada para que se tenga menos de la mitad del volumen?	**26** Susana quiere cambiar de bolsa 35,5 kg de azúcar a bolsas más pequeñas. Si cada bolsa pequeña soporta 0,5kg, ¿cuántas bolsas necesitaría?	**27** En el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B = 72°$, ¿cuál es la suma, en grados, de los otros dos ángulos? 
30 ¿Cuál es el área, en m^2, de la región sombreada del rectángulo? 				

Un juego binario

El 'mago' Mauricio dispone de cinco listas (matrices) $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ de números:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 7 \\ 10 & 11 & 14 & 15 \\ 18 & 19 & 22 & 23 \\ 26 & 27 & 30 & 31 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix}$$

que bien puede haber recortado en forma de cartas, poniendo al reverso la identificación $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$.
Es muy importante que Mauricio memorice los siguientes números, cada uno asociado a una carta:

$$\mathbf{A}:1 \qquad \mathbf{B}:2 \qquad \mathbf{C}:4 \qquad \mathbf{D}:8 \qquad \mathbf{E}:16$$

Otra persona, Beatriz, escoge en secreto de Mauricio un número entre 1 y 31. Acto seguido, Mauricio le entrega las cinco cartas y le pide a Beatriz que ponga boca abajo las cartas donde aparece su número. Mauricio suma mentalmente los números asociados a las cartas señaladas y sorprende a Beatriz diciéndole que ese es su número secreto.
Por ejemplo, Beatriz elige el número 22 y selecciona (en cualquier orden) las cartas $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}$ donde éste aparece. Mauricio suma $2+4+16 = 22$ y ha 'adivinado' el secreto.
Veamos ahora la explicación del 'truco'.
Tomamos el ejemplo de 22 y dividimos repetidamente por 2 de este modo

$$\begin{aligned} 22 &= 2 \times 11 + 0 \\ 11 &= 2 \times 5 + 1 \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

Luego sustituimos

$$\begin{aligned} 22 &= 2 \times 11 = 2\,(2 \times 5 + 1) = 2^2 \times 5 + 2 \\ &= 2^2\,(2 \times 2 + 1) + 2 = 2^4 + 2^2 + 2 \end{aligned}$$

que es precisamente la suma de los asociados a las cartas $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}$.
Más general, tomemos un entero cualquiera m tal que $1 \leq m \leq 31$.

Apliquemos cuatro veces el algoritmo de división como sigue:

$$\begin{aligned} m &= 2q_1 + r_1 \\ q_1 &= 2q_2 + r_2 \\ q_2 &= 2q_3 + r_3 \\ q_3 &= 2q_4 + r_4 \end{aligned}$$

nótese que cada resto r_i es 0 ó 1 según el dividendo sea par o impar respectivamente.
Por sustituciones sucesivas obtenemos

$$\begin{aligned} m &= 2\,(2q_2 + r_2) + r_1 = 2^2 q_2 + 2r_2 + r_1 \\ &= 2^2\,(2q_3 + r_3) + 2r_2 + r_1 = 2^3 q_3 + 2^2 r_3 + 2r_2 + r_1 \\ &= 2^3\,(2q_4 + r_4) + 2^2 r_3 + 2r_2 + r_1 = 2^4 q_4 + 2^3 r_4 + 2^2 r_3 + 2r_2 + r_1 \end{aligned}$$

Es decir,

$$m = 16q_4 + 8r_4 + 4r_3 + 2r_2 + r_1$$

Nótese ahora que q_4 debe ser 0 ó 1, puesto que $m \leq 31$.
En resumen, hemos logrado expresar

$$m = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 \tag{1}$$

donde cada a_k es 0 ó 1.
Un lector veterano habrá observado que (1) no es otra cosa que la expresión de m en base 2, es decir, en sistema binario.
Si el número secreto m aparece, digamos, en la carta $\mathbf{D}$ hacemos $a_3 = 1$, de lo contrario $a_3 = 0$ y así para cada carta. En la carta $\mathbf{D}$ están todos aquellos números entre 1 y 31 cuya expresión de la forma (1) tiene $a_3 = 1$. Y el mismo principio se aplica para construir las matrices que constituyen las demás cartas. No es casual que $\mathbf{A}$ contiene todos los impares entre 1 y 31.
Beatriz eligió $m = 22$ que se encuentra en las cartas $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}$. En este caso tenemos

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 0 \qquad a_4 = 1$$

de modo que (1) se convierte en

$$16 \times 1 + 8 \times 0 + 4 \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 22$$

Ignacio L. Iribarren
Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales
y Universidad Simón Bolívar

OJM

OCTUBRE 2013

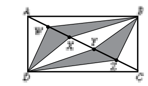
1 Los primeros nueve enteros impares positivos se colocan en el cuadrado mágico tal que la suma de los números de cada columna, fila y diagonal sean iguales. Halle el valor de $A+E$.

A	1	B
5	C	13
D	E	3

2 132 personas cruzan un río en un bote al mismo tiempo. 60 personas viajan en botes con capacidad 5 personas, 36 viajan en botes para 4 personas, y los demás viajan en botes para tres personas. ¿Cuántos botes deben ser usados si todos están llenos a su máxima capacidad?

3 ¿Cuántos diseños diferentes se pueden hacer si se acomodan en línea recta cinco pelotas blancas y tres negras, de tal manera que no están dos pelotas negras juntas?

4 El rectángulo $ABCD$ mide 9 unidades de largo y 5 de ancho. La diagonal AC es dividida en 5 partes iguales por los puntos W, X, Y y Z. Determine el área de la región sombreada.



7 Si $x+y+z=25$ y $y+z=14$, ¿cuál es valor de x?

8 Luis estaba jugando con los dígitos 2, 0, 1, 3. Mezclándolos, creó números. ¿Cuántos números escribió?

9 Si 60 % de un número es 42, ¿cuál es el 50 % de ese mismo número?

10 Si p y q son números reales y $f(x)=px+q$, $f(f(f(x)))=8x+21$, ¿cuál es el valor de $p+q$?

11 Si $10 \leq x \leq 20$ y $40 \leq y \leq 60$, ¿cuál es el mayor valor que puede tomar $\frac{x^2}{2y}$?

14 Una lista de 5 números enteros tiene promedio aritmético de 69. Su mediana (el entero del centro) es 83 y su moda (el más frecuente) es 85. El rango entre los 5 enteros es 70. ¿Cuál es el segundo menor entero de entre los 5 de la lista?

15 Los dígitos 1, 2, 3 y 4 pueden ordenarse para formar 24 números diferentes de 4 dígitos. Si estos 24 núemros se listan de menor a mayor, en qué posición se encuentra el 3142?

16 Si $x^2yz^3=7^3$ y $xy^2=7^9$, ¿cuál es el valor de xyz?

17 La suma de los primeros 50 enteros positivos impares es 50^2. ¿Cuál es la suma de los primeros 50 enteros pares?

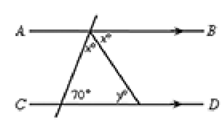
18 Encontrar el menor entero positivo que no divide al producto de los primeros 100 enteros positivos.

21 Si la siguiente secuencia de 5 flechas se repite, ¿qué flecha aparecerá en la posición número 48?

$\rightarrow$. $\nearrow$. $\nwarrow$. $\leftarrow$. $\downarrow$

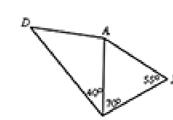
22 El producto de dos enteros positivos p y q es 100. ¿Cuál es el mayor valor posible para $p+q$?

23 En el diagrama, AB es pararela a CD. ¿Cuál es el valor de y?



24 Los vértices de un triángulo tienen coordenadas (1,1), (7,1) y (5,3). ¿Cuál es el área del triángulo?

25 En el diagrama, $DA=CB$. ¿Cuál es la medida, en grados, del ánguloa DAC?



28 Si $\sqrt{y-5}=5$ y $2^x=8$, ¿cuál es el valor de $x+y$?

29 La suma de los dígitos de un número entero positivo de 5 dígitos es 2. ¿Cuál es la cantidad de enteros que cumplen con esta condición?

30 Si $N=(7^{p+4})(5^q)(2^3)$ es un cubo perfecto donde p y q son enteros positivos, ¿cuál es el menor valor posible para $p+q$?

31 ¿Cuántos números naturales menores que 100 tienen la suma de sus cifras igual a 7?

Contemos puntos para calcular áreas

En la figura 1 se muestra un pentágono cuyos vértices son nodos de una cuadrícula. Tomando como unidad de medida del área la del cuadrado que forma la cuadrícula, ¿cuál es el área de este pentágono? Podemos trazar un segmento auxiliar, como se ve en la figura 2, de manera que la región encerrada por el pentágono quede dividida en dos regiones triangulares y una trapezoidal, cuyas áreas se calculan fácilmente pues sus bases y alturas tienen como longitudes un número entero de lados de los cuadrados que conforman la cuadrícula. Las áreas de las regiones triangulares son 4 y 2 unidades cuadradas, mientras que la de la región trapezoidal es 13 unidades cuadradas.
Así, el área del pentágono es $4 + 2 + 13 = 19$ unidades cuadradas.

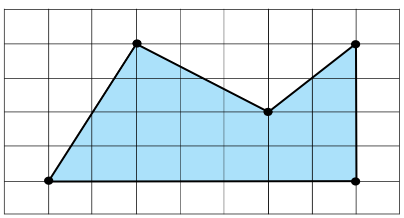


Figura 1

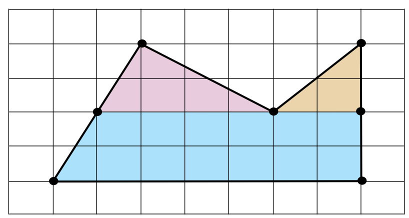


Figura 2

El procedimiento de dividir la región poligonal dada en regiones triangulares o cuadrangulares no siempre es muy práctico. Por ejemplo, una forma de dividir el hexágono de la figura 3 se ilustra en la figura 4.

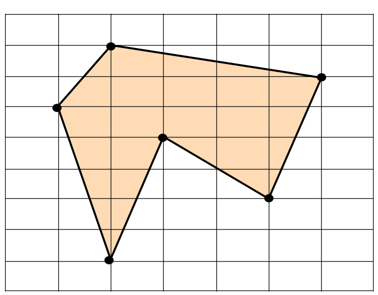


Figura 3

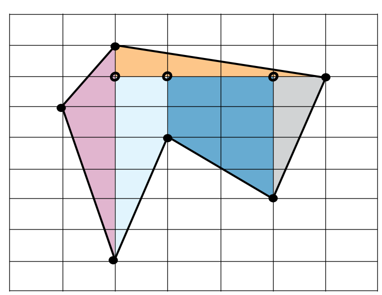


Figura 4

A continuación, veremos una fórmula mediante la cual podemos calcular el área de un polígono cuyos vértices sean nodos de una cuadrícula, sin tener que dividir la región poligonal. Sólo debemos contar los nodos de la cuadrícula que estén en el interior de la región poligonal dada, cantidad que denotaremos por i, y los nodos que están en el polígono dado, cantidad que denotaremos por f. El área A del polígono es $A = \frac{1}{2}f + i - 1$. Esta igualdad recibe el nombre de **Fórmula de Pick**, en honor al matemático austríaco Georg Pick (1859 - 1942), quien la dio a conocer en un artículo publicado en 1899. Comencemos con ejemplos sencillos. Las longitudes de la base y de la altura del triángulo de la figura 5 son 5 y 4, respectivamente. Luego, su área es 10 unidades cuadradas. ¿Cuántos nodos hay en el interior del triángulo?, ¿cuántos en el triángulo?
En la figura 6, vemos que hay 6 nodos en el interior (marcados con una ×) y en el triángulo hay 10 nodos (los tres vértices y siete puntos que marcamos con o).
Así, $i = 6$ y $f = 10$. En consecuencia, aplicando la fórmula de Pick, el área A de este triángulo es $A = \frac{1}{2} \cdot 10 + 6 - 1 = 5 + 6 - 1 = 10$ unidades cuadradas.

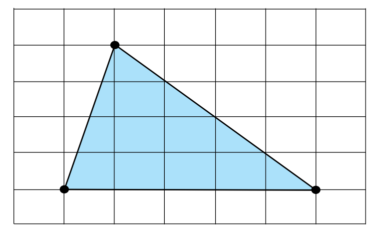


Figura 5

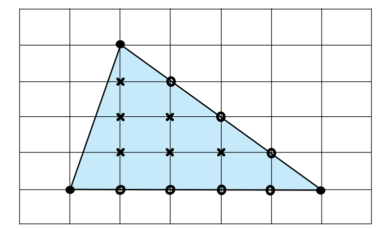


Figura 6

En el caso del pentágono de la figura 1, tenemos $f = 16$ e $i = 12$. Luego, $A = \frac{1}{2} \cdot 16 + 12 - 1 = 8 + 12 - 1 = 19$ unidades cuadradas.
Ahora presentamos varios polígonos cuyos vértices son nodos de una cuadrícula para que practiques la determinación de sus áreas. Las respuestas las conseguirás en la sección de soluciones al final del calendario.

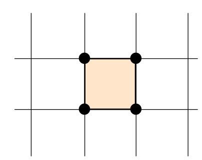


Figura 7

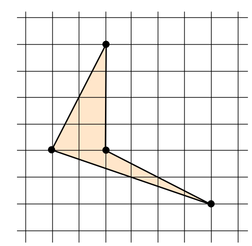


Figura 8

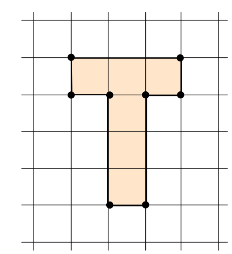


Figura 9

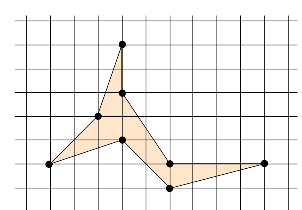


Figura 10

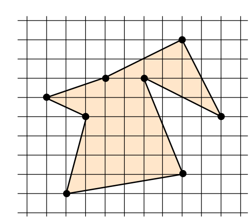


Figura 11

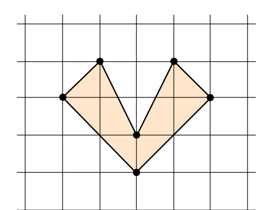
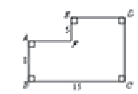
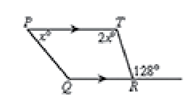
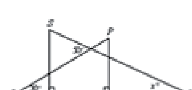
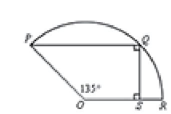


Figura 12

Fabiola Irene Czwienczek Miler
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico de Maracay

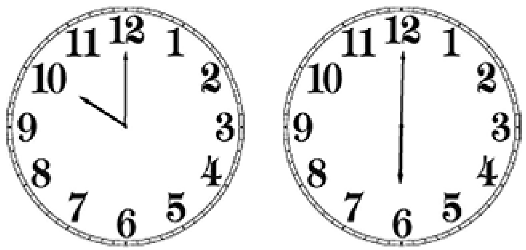
OJM

NOVIEMBRE 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				1 Hay siete cartas en una caja con los siguientes números: 5, 84, 90, 613, 8, 75 y 605. ¿Cuál es el menor número de cartas que se deben sacar para asegurar que hay una múltiplo de 3?
4 	**5** ¿Cuál de los siguientes números es mayor: $1^{20}, 2^{14}, 4^8, 8^5, 16^3$?	**6** La medida del largo de un rectángulo es tres veces la de su ancho. Si la medida del largo decrece en 5 unidades y el ancho incrementa por 5 unidades, el rectángulo se convierte en un cuadrado. Determine la medida del largo del rectángulo original.	**7** Si $a+b=9-c$ y $a+b=5+c$, ¿cuál es el valor de c?	**8** La figura $ABCDEF$ tiene $AB=8$, $BC=15$ y $EF=5$ como se muestra. Determine el perímetro de la figura. 
11 Hace cuatro años, Daniel le triplicaba la edad a José. En cinco años, Daniel tendrá el doble de la edad de José. ¿Qué edad tiene Daniel hoy?	**12** Determine el número de divisores positivos de 18800 que son divisibles por 235.	**13** La progresión 2, 6, 18, 54, n, 486 se construyó siguiendo un patrón sencillo. ¿Cuál es el valor de n?	**14** ¿Cuál es el mayor número primo menor de 30 que puede escribirse como la suma de dos números primos?	**15** Si n es cualquier entero y $n+3, n-9, n-4, n+6$ y $n-1$ se ordenan de menor a mayor, ¿cuál es el entero del medio?
18 El promedio aritmético de una lista de n números es 7. Cuando se agrega a dicha lista el número -11, el nuevo promedio es 6. ¿Cuál es el valor de n?	**19** La población de Parlandia nunca usa dígitos impares. En lugar de contar 1, 2, 3, 4, 5, 6, en Parlandia se cuenta 2, 4, 6, 8, 20, 22. ¿Cuál es el entero 111 en la versión de los parlandeces?	**20** Cuando 45 es dividido entre 7, el resto es 3. ¿Cual es el resto cuando 70 es dividido por 17?	**21** Si $\frac{3}{x+10} = \frac{1}{2x}$, ¿cuál es el valor de x?	**22** En el diagrama, PT es paralelo a QR. ¿Cuál es la medida, en grados, de $\angle PQR$? 
25 Existe un entero impar N entre 400 y 600 que es divisible tanto entre 5 como entre 11. ¿Cuál es la suma de los dígitos de N?	**26** En el diagrama, $\triangle PQR$ y $\triangle STU$ se superponen de manera que $RTQU$ sea una recta. ¿Cuál es el valor de x? 	**27** Seis enteros consecutivos son escritos en el pizarrón. Cuando uno de ellos es borrado, la suma de los restantes es 2013. ¿Cuál es la suma de los dígitos del entero que fue borrado?	**28** Seis amigos intercambiarán libros en la feria del libro. Cada amigo tiene un libro para dar y recibirá un libro de otro amigo que no es a quien él le dará. ¿De cuántas formas se pueden cambiar los libros?	**29** En el diagrama, los puntos P, Q y R pertenecen al mismo círculo con centro O y radio 12. El punto S está en OR. Si $\angle POR = 135°$, ¿cuál es el área del trapecio $OPQS$? 

Aritmética Modular

¿Cuánto es $10+8$? Seguramente todos dirán 18, que es la respuesta correcta. Sin embargo, supongamos que son las 10 de la noche y nos acostamos a dormir. Si dormimos ocho horas, ¿a qué hora nos despertaremos? A las 6 de la mañana, ¿verdad?



Entonces, "en algún sentido", la suma $10+8$ es 6. Para precisar este sentido introducimos la siguiente definición.

> Sean a, b y m números enteros. Se dice que a y b son *congruentes* módulo m, y se escribe $a \equiv b \pmod{m}$, si m divide a la diferencia $a-b$.

Así, por ejemplo, $18 \equiv 6 \pmod{12}$, ya que $18-6=12$ es divisible entre 12.
Observemos que el símbolo $\equiv$ utilizado para indicar congruencia es muy parecido al signo de igualdad. Esto se debe a que la congruencia tiene muchas propiedades similares a las de la igualdad. En primer lugar, la congruencia es reflexiva, simétrica y transitiva. En segundo lugar, las congruencias de un mismo módulo se pueden sumar y multiplicar miembro a miembro. En símbolos, si

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{y} \quad c \equiv d \pmod{m}$$

entonces

$$a+c \equiv b+d \pmod{m}$$

y

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

En efecto, $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$ es divisible entre m pues tanto $(a-b)$ como $(c-d)$ lo son. Además

$$ac-bd = ac-ad+ad-bd = a(c-d)+(a-b)d,$$

que también es divisible entre m. Por supuesto que también se pueden restar miembro a miembro congruencias de un mismo módulo, o elevar ambos miembros a una determinada potencia (lo que equivale a una multiplicación repetida).

El lector puede comprobar como ejercicio que $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si a y b dejan el mismo resto en la división entera entre m. Esto nos permite resolver algunos problemas de manera casi mágica. Por ejemplo, supongamos que se nos pregunta cuál es el resto de la división de 2^{2013} entre 7. Efectuar la división está claramente fuera de nuestro alcance (al menos con lápiz y papel). Pero como $2^3=8\equiv 1 \pmod{7}$, usando las propiedades de las congruencias se tiene que

$$2^{2013} = 2^{3\cdot 671} = (2^3)^{671} \equiv 1^{671}\cdot 1$$

y la respuesta es 1.
Veamos ahora un problema: probar que si x, y, z son enteros tales que $x^2+y^2=z^2$, entonces al menos uno de ellos es múltiplo de 3.
Solución: Observemos en primer lugar que un cuadrado no puede ser congruente con 2 módulo 3. En efecto, si $x\equiv 0 \pmod{3}$ entonces $x^2\equiv 0^2=0 \pmod{3}$, si $x\equiv 1 \pmod{3}$ entonces $x^2\equiv 1^2=1 \pmod{3}$ y si $x\equiv 2 \pmod{3}$ entonces $x^2\equiv 2^2\equiv 1 \pmod{3}$. Entonces si ni x ni y fuesen múltiplos de 3 se tendría $z^2=x^2+y^2\equiv 1+1=2 \pmod{3}$, absurdo.
Un resultado muy importante en la teoría de congruencias es el llamado Teorema "pequeño" de Fermat:

Si el primo p no divide al entero a, entonces

$$\boxed{a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}.}$$

Otro problema: pruebe que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es divisible entre 7.
Solución: Como $2222=317\cdot 7+3$ y $5555=793\cdot 7+4$, se tiene que

$$2222^{5555}+5555^{2222}\equiv 3^{5555}+4^{2222} \pmod{7}.$$

Pero como 7 no divide a 2222 ni a 5555, por el Teorema de Fermat se tiene $2222^6\equiv 1 \pmod{7}$ y$5555^6\equiv 1 \pmod{7}$. Por lo tanto

$$3^{5555}+4^{2222}\equiv 3^{925\cdot 6+5}+4^{370\cdot 6+2}\equiv 3^5+4^2\equiv 259\equiv 0 \pmod{7}.$$

Otro resultado interesante es el Teorema de Wilson:

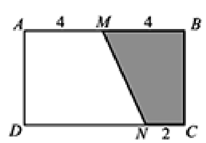
Para cualquier primo p, se cumple $(p-1)!\equiv -1 \pmod{p}$.

Para demostraciones y problemas adicionales vea nuestras notas *Teoría de Números para Olimpiadas Matemáticas*, en `http://www.acm.ciens.ucv.ve/material.php`

José H. Nieto S.
Universidad del Zulia

OJM

DICIEMBRE 2013

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 El dígito más a la izquierda de un entero con 2013 dígitos es 6. En este entero, el número formado por dos dígitos consecutivos cualesquiera es divisible entre 17 o entre 23. ¿Cuáles son los posibles valores del dígito más a la derecha?	**3** Se tienen 7 puntos en un papel. Exactamente 4 de ellos están en una recta. Ninguna otra recta contiene más de 2 de estos puntos. 3 de los 7 puntos se seleccionan para formar el vértice de un triángulo. ¿Cuántos triángulos son posibles?	**4** Un granjero tiene 7 vacas, 8 ovejas y 6 cabras. ¿Cuántas cabras más debe comprar para que la mitad de sus animales sean cabras?	**5** La suma de los dígitos de un número par de diez dígitos es 89. ¿Cuál es el último dígito?	**6** Se espacian números naturales alrededor de un círculo en orden del 1 al n. Si el número 5 se encuentra opuesto al número 14, ¿cuál es el último dígito?
9 El promedio aritmético de 19 enteros consecutivos es 99. ¿Cuál es el mayor de estos enteros?	**10** Si a, b y c son enteros positivos diferentes tales que $abc = 16$, ¿cuál es el mayor valor posible para $a^b - b^c + c^a$?	**11** Si x es un entero positivo menor que 100, ¿cuántos valores para x hacen que $\sqrt{1+2+3+4+x}$ sea un entero?	**12** ¿Cuántos números pares entre 1 y 101 son múltiplos de 3?	**13** Si $a(c+d)+b(c+d)=42$ y $c+d=3$, ¿cuál es el valor de $a+b+c+d$?
16 Si el producto de cuatro enteros consecutivos es 358800, ¿cuál es la suma de estos cuatro enteros?	**17** ¿Cuál es la suma de los dígitos del entero 7777777777777777^2 -2222222222222223^2?	**18** ¿De cuántas maneras diferentes se puede expresar el número 75 como una suma de dos o más enteros positivos consecutivos?	**19** Los puntos $Q(1,-1)$, $R(-1,0)$ y $S(0,1)$ son tres vértices de un paralelogramo. ¿Cuáles pueden ser las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo ?	**20** ¿De cuántas formas diferentes pueden ordenarse 8 personas en una fila en frente de una cafetería?
23 ¿Para cuántos enteros positivos n, con $n \leq 100$, es n^3+5n^2 el cuadrado de un entero?	**24** En el diagrama, el área del rectángulo $ABCD$ es 40. ¿Cuál es el área del $MBCN$? 	**25** **“Se quiere más lo que se ha conquistado con más fatiga.”** Aristóteles (384 a. C. - 322 a. C.). Polímata: filósofo, lógico y científico de la Antigua Grecia	**26** El primer término de una secuencia es x. Cada uno de los términos siguientes se obtiene de doblar el término anterior y luego sumarle 4. Si el tercer término es 52, ¿cuál es el valor de x?	**27** Si $\frac{3}{x-3}+\frac{5}{2x-6}=\frac{11}{2}$, ¿cuál es el valor de $2x-6$?
30 ¿Cuál es el mayor entero n para el cual $3(n^{2007}) < 3^{4015}$?	**31** 5 enteros positivos se listan en orden creciente. La diferencia entre cualquiera dos números consecutivos en la lista es 3. El quinto número es múltiplo del primero. ¿Cuántas listas diferentes así de cinco enteros puede haber?			

ORM

Soluciones Enero - Junio

Enero

2	6.
3	6+0=6.
4	$16 + 54 = 70$.
7	Bs. 105.
8	41.
9	15.
10	El 31 de diciembre de 2012.
11	567.
14	9.
16	307.
17	17.
18	2:05 pm.
21	2 y 12.
22	9.
23	2013.
24	Natalia-Alicia-Elías-Jimmy.
25	12.
28	21.
29	15.
30	28.
31	Dora.

Febrero

1	10.
4	1ero Tomás; 2do Daniel; 3ero Alan y 4to Pablo.
5	Bs. 135.
6	$865 - 24 = 841$.
7	El galgo.
8	La familia Pérez.
13	900.
14	24.
15	5.
18	6.
19	Juan y ganó 13 metras.
20	8.
21	23.
22	93.
25	10.
26	150 cm^2.
27	6.
28	50.

Marzo

1	32 m.
4	Bs. 404.
5	81 cm^2.
6	43 %.
7	16.
8	9.
11	22 %.
12	160.
13	3.
14	2022.
15	3.
18	9.
20	3 formas.
22	186.

Abril

1	La figura 2013.
2	33 y 44.
3	56.
4	Bs. 6840 y 125 cajas.
5	19.
8	82656.
9	Jueves.
10	200.
11	Bs. 360.
12	Beisbol.
15	7 limones.
16	30.
17	56.
18	104 cm^2.
22	2150 caramelos.
23	96 cm.
24	18.
25	Azul.
26	27.
29	21, 15 y 35.
30	34 páginas.

Mayo

2	M.
3	3.
6	4.
7	Primera.
8	36.
9	56.
14	15.
15	7.
17	5.
20	$\frac{1}{2}$.
21	11.
22	600000.
23	7.
27	3999.
28	20.
29	3.
30	60.
31	108 gramos.

Junio

4	66 cm.
5	36.
6	15.
7	3.
10	12.
11	27.
12	35 gramos.
13	24.
17	17.
18	Ninguno.
19	20.
20	27.
25	40.
26	6.
27	160.

OJM

Soluciones Julio - Diciembre

Julio

1	891.
2	13.
3	25.
4	5.
8	4.
9	Bs. 240.
10	Bs. 11,01.
11	70.
12	64.
15	24.
16	7.
17	40.
19	12.
22	4.
23	3.
25	4 años.
26	12.
29	15.
30	501.
31	110.

Agosto

1	1007.
2	27.
5	4.
6	20.
7	9.
8	98.
9	60 cm.
12	20 cm.
13	4025.
14	1.
15	2 centésimas.
16	15 cm^2.
20	15 cm^2.
21	13.
22	32.
23	5.
26	225 y 275.
27	6.
28	1009.
29	480 cm.
30	1 hora.

Septiembre

2	8.
3	1.
4	20 veces.
5	$\frac{\pi}{2}$.
6	65043.
9	25.
10	28.
11	68.
12	12,5 horas.
13	$\blacktriangle$.
16	15 ó 16.
17	25 cm^3.
18	7.
19	34.
23	3.
24	45.
25	7.
26	71.
27	108°.
30	28.

Octubre

1	32.
2	33.
3	20.
4	18.
7	11.
8	18.
9	35.
10	5.
11	5.
14	77.
15	Posición 14.
16	$7^4 = 2401$.
17	$50^2 + 50 = 2550$.
18	101.
21	$\diagdown$.
22	101.
23	55.
24	6.
25	100.
28	33.
29	5.
30	5.
31	8.

Noviembre

1	5.
5	$4^8 = 2^{16}$.
6	15.
7	2.
8	56.
11	31.
12	10.
13	162.
14	19.
15	$n-1$.
18	17.
19	842.
20	2.
21	2.
22	116.
25	18.
26	20.
27	6.
28	160.
29	108.

Diciembre

2	2 y 5.
3	31.
4	9.
5	8.
6	18.
9	108.
10	263.
11	7.
12	16.
13	17.
16	98.
17	74.
18	5.
19	(-2,2); (2,0); (0,-2).
20	40320.
23	8.
24	15.
26	10.
27	2.
30	8.
31	6.

Soluciones
Contemos puntos para calcular áreas

Figura	3	7	8	9	10	11	12
f	7	4	10	14	14	11	8
i	15	0	2	0	3	29	2
$A = \frac{1}{2}f + i - 1$	17,5	1	6	6	9	33,5	5

Una actividad de:

Asociación Venezolana
de Competencias Matemáticas

UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de
Matemáticas. Ofic. 331. Los Chaguaramos,
Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 0212 605.1512
E-mail: asomatemat8@gmail.com
www.acm.ciens.ucv.ve

FUNDECOM
Fundación para el Desarrollo
de Competencias Matemáticas

Olimpiada Recreativa de Matemática

www.olimpiadarecreativa.com

fundación EMPRESAS POLAR
RIF: J-00110574-3

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Depósito Legal CC259201224

Coordinación General
Rafael Sánchez Lamoneda

Coordinación Nacional ORM
Dra. Eolide Plaza de Salazar

Recopilación y soluciones problemas ORM
Eduardo Sarabia
Henry Martínez
Silvina María de Jesús

Recopilación y soluciones problemas OJM
Laura Vielma Herrero

Revisión Académica
José Heber Nieto

Edición y Montaje
Laura Vielma Herrero

Colaboradores
Renato Valdivieso
Leonardo Mora
Carlos Uzcátegui
Miguel Méndez
Carlos Di Prisco
Stefania Marcantognini
Carenne Ludeña
José Rafael León
Ignacio Iribarren
Fabiola Czwienczek
José Heber Nieto

Diseño de portada y montaje digital
Rogelio *Paco* Chovet

Producción editorial
Gustavo Suárez