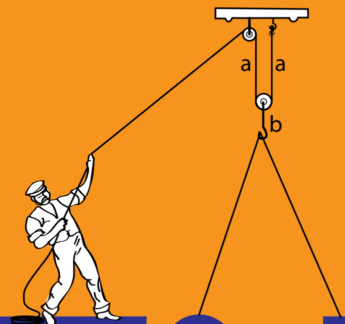
Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

FUNDECOM
Fundación para el Desarrollo de Competencias Matemáticas



CALENDARIO MATEMÁTICO 2012

fundación Empresas Polar

RIF: J-00110574-3

Presentación del Calendario Matemático 2012

El presente es el quinto Calendario Matemático que elaboramos con motivo del Programa de Olimpiadas Matemáticas, que lleva adelante la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la Fundación Para el Desarrollo de Competencias Matemáticas. El mismo tiene como objetivo facilitar a docentes y alumnos, un grupo de problemas de matemáticas recreativas, junto con una serie de pequeños artículos de divulgación de temas científicos o sugerencias de trabajo en el aula. Para esto último contamos con la colaboración de un grupo de colegas de varias instituciones nacionales e internacionales, quienes gustosamente nos ofrecen su apoyo todos los años.

El Calendario está estructurado de tal manera que proponemos un problema por día salvo los fines de semana y días festivos. Además intercalamos entre los problemas, fotos o dibujos que indican el tema para cada Calendario. Este año le rendimos homenaje a la ciencia natural que estudia las propiedades del espacio, el movimiento, el tiempo, la materia y la energía, así como sus interacciones, es decir, la Física.

En un principio la Física era tambien llamada filosofia nátural, pues incluía los campos de la química, la biología, y la matemática. Durante la revolución científica del siglo XVII éstas disciplinas se separaron, considerándose cada una como una ciencia en particular. Sin embargo, la frontera entre la física y la matemática siempre ha sido difusa. No sólo la matemática es el lenguaje utilizado por la física, sino que también hay muchos desarrollos matemáticos que han sido llevado a cabo por físicos e ingenieros. Más aún, resultados fundamentales en una y otra ciencia han sido conseguidos tanto por físicos que trabajan en matemáticas, como Edward Witten, así como por matemáticos que trabajaron en física, como Paul Dirac.

El campo de estudio de la física, tanto de la teórica como de la experimental, abarca desde las partículas fundamentales, hasta el nacimiento de estrellas, incluyendo por supuesto la gran incógnita acerca del origen de nuestro universo. Podemos agrupar sus diferentes áreas de estudio en cinco teorías centrales:

La mecánica clásica, que describe el movimiento a escala macroscópica. Aquí se encuentran tanto los trabajos de Newton como los de Lagrange y Hamilton.

El electromagnetismo, que describe la interacción de partículas cargadas bajo la acción de campos eléctricos y magnéticos. Se puede dividir en electroestática y electrodinámica. La teoría clásica se basa en los trabajos de Lorentz y Maxwell, mientras que los desarrollos más recientes se enmarcan dentro de la electrodinámica cuántica, área en la que fueron pioneros físicos como Dirac, Heisenberg y Pauli.

La relatividad, que describe el espacio-tiempo y la interacción gravitatoria. Formulada por Einstein, se divide en dos ramas: relatividad especial y relatividad general. Además de los trabajos de Einstein, encontramos tambien los de Lorentz y Minkowski.

La termodinámica y la mecánica estadística, que describe los fenómenos moleculares y la transferencia de calor. En termodinámica encontramos los trabajos de Carnot, Kelvin y Clausius. La mecánica estadística se basa principalmente en los trabajos de Boltzmann.

La mecánica cuántica, que trata los sistemas atómicos y subatómicos. Formulada por Schrödinger, Heisenberg y Dirac, engloba la teoría cuántica establecida por Planck, Einstein y Bohr, y da las bases teóricas para la física de la materia condensada. Posteriormente se formula la Teoría Cuántica de Campos, que extiende la mecánica cuántica de acuerdo a la teoría de la relatividad especial, gracias en parte a los trabajos de Feynmann, Schwinger, Tomonaga y Dyson, quienes además formularon la electodinámica cuántica, es decir una teoría cuántica del espectro electromagnético.

En todo este proceso, los físicos han utilizado y desarrollado herramientas matemáticas cada vez más sofisticadas. Esto ha hecho que ambas ciencias estén muy vinculadas. Cabe mencionar que dos de los cientificos citados anteriormente, Paul Dirac, matemático de formación, y Edward Witten con formación en física, ganaron respectivamente el premio Nobel de Física, y la Medalla Fields (premio en Matemáticas), los galardones más prestigiosos en cada campo.

A continuación una lista de los premios Nobel en física entregados en los últimos 5 años:

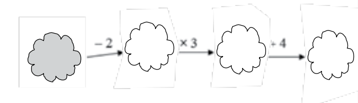
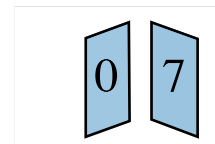
2007	Albert Fert	Francia
2007	Peter Grünberg	Alemania
2008	Makoto Kobayashi	Japón
2008	Toshihide Maskawa	Japón
2008	Yoichiro Nambu	Japón/ USA
2009	Charles K. Kao	Hong Kong/ USA/ Reino Unido
2009	William S. Boyle	Canada/ USA
2009	George E. Smith	USA
2010	Andre Geim	Rusia/ Países Bajos
2010	Konstantin Novoselov	Rusia/ Reino Unido
2011	Saul Perlmutter	USA
2011	Brian P. Schmidt	Australia/ USA
2011	Adam G. Riess	USA

Aprovechamos la oportunidad para agradecer a todos nuestros colaboradores, quienes desinteresadamente nos entregan año a año buenos artículos para enriquecer el Calendario Matemático.

Para mayor información sobre las Olimpiadas Matemáticas puede visitar nuestro sitio de internet, http://www.acm.ciens.ucv.ve.

José Alberto Infante
Departamento de Matemáticas
Universidad Simón Bolívar

ENERO 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 ¿Cuántas letras comunes tienen las palabras CANGURO y PROBLEMA?	**3** ¿Cuál es el primer número mayor que 2012 y que la suma de sus dígitos es 5?	**4** En el parque hay dos árboles sembrados en línea recta y separado uno del otro por 8 metros. Pedro corre desde un árbol al otro, hace el recorrido de vuelta y repite esto 3 veces. ¿Cuántos metros corrió Pedro?	**5** María construye un tren con tres vagones: uno rojo, uno verde y otro azul. ¿Cuántos trenes diferentes puede construir que se diferencien en el orden de los colores?	**6** ¿Cuál número debe colocarse en la nube gris para que todas las operaciones sean correctas? 
9 	**10** Ana tiene Bs. 50. Ella quiere comprar cinco cuadernos a Bs. 8 cada uno y algunos lápices a Bs. 3 cada uno. ¿Cuál es la mayor cantidad de lápices que puede comprar Ana?	**11** Al realizar la operación: $4 \times 4 + (4 + 4 + 4) + 4 \times 4$ obtenemos como resultado:	**12** Si tienes tarjetas con el dígito 0 y otras con el dígito 7, ¿cuántos números de tres dígitos puedes formar con ellas? 	**13** Raúl, quien es menor que Pedro en un año y un día, nació el primero de enero de 2002. ¿Cuál es la fecha de nacimiento de Pedro?
16 María escribe un dígito. A la derecha de ese dígito escribe otro dígito. Al número obtenido le suma 19 y obtiene 72. ¿Cuál es el primer dígito que escribió María?	**17** Un cubo de arista 3 cm. se pinta de verde. Luego se corta en cubitos de 1 cm. de arista. ¿Cuántos cubitos tienen sólo dos caras pintadas de verde?	**18** Se tiene un cuadrado grande cuyo lado mide 6 cm y un cuadrado pequeño cuyo lado mide 2 cm. ¿Cuántos cuadrados pequeños se necesitan para llenar el cuadrado grande?	**19** La suma de ciento setenta y cinco centésimas y ciento veinticinco centésimas es:	**20** Una caja con treinta fósforos pesa 650 gramos. Si colocamos diez fósforos adicionales a la caja, entonces pesa 800 gramos. ¿Cuántos gramos pesa la caja vacía?
23 En segundo grado hay 40 pupitres. Ayer fueron a clase 10 varones y 22 hembras. ¿Cuántos pupitres quedaron sin ocupar?	**24** ¿A qué es igual $2012 - 2011 + 2010$?	**25** ¿Cuál es el valor de $2 \times 0 \times 1 \times 2 + 2012$?	**26** Las campanas de un reloj suenan cada hora. Por ejemplo, si son las tres de la mañana o de la tarde, el reloj toca tres campanadas. ¿Cuántas campanadas da el reloj en un día completo de 24 horas?	**27** Ya completé los tres quintos de un álbum de Las Ciudades del Mundo. Para llenar un cuarto de lo que me falta, necesito 36 barajitas. ¿Cuántas barajitas en total lleva el álbum?
30 Se tienen 97 cubos de madera de 1 cm de arista. Se construye con ellos dos cubos, lo más grande posible, pegando los cubos de madera. ¿Cuántos cubos quedan sin utilizar?	**31** Si Sofía le da a Pablo dos chocolates, éste le presta su bicicleta durante tres horas. Si le da doce caramelos se la presta durante dos horas. Sofía le va a dar un chocolate y tres caramelos. ¿Cuánto tiempo le va a prestar la bicicleta Pablo?			

El Problema de Malfatti: un Problema Elemental no tan Elemental

En 1803 el matemático italiano Gianfrancesco Malfatti (1731–1807) publicó una memoria en la cual planteaba y, supuestamente resolvía, un interesante problema. El problema en cuestión, en su versión original, se muestra en la Figura 2.

Figura 1

MEMORIA

SOPRA UN PROBLEMA STEREOTOMICO

Figura 2

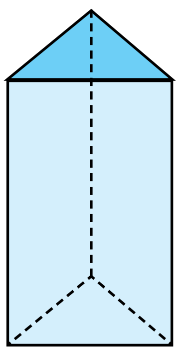


Figura 3

Dado un pedazo de mármol con forma de prisma triangular ¿cómo obtener tres columnas cilíndricas, desperdiciando la menor cantidad posible de mármol?

Como es lógico de suponer, la altura de cada columna ha de coincidir con la del prisma. Luego, el problema queda reducido a uno en el plano, el de empaquetar dentro de un triángulo dado tres círculos con la mayor área total posible. Por supuesto, éstos no pueden traslaparse. En su solución Malfatti asumió que los tres círculos en el problema del mármol debían ser tangentes entre sí y cada uno de ellos debía ser tangente a dos lados del triángulo (Figura 4). Estos círculos se denominan círculos de Malfatti.

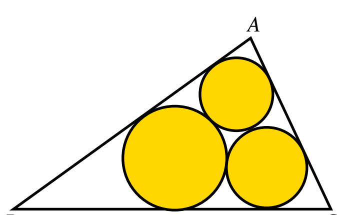


Figura 4

En 1929 Lob y Richmond mostraron vía un contraejemplo (y lo publicaron en 1930) que en el caso de un triángulo equilátero <u>los círculos de *Malfatti*</u> no son óptimos en el sentido de que ellos <u>no solucionan el "problema del mármol"</u>.

Lob y Richmond mostraron que una configuración diferente de círculos que consiste del incírculo y dos círculos empaquetados en los vértices del triángulo resuelve la construcción de Malfatti (Figura 5).

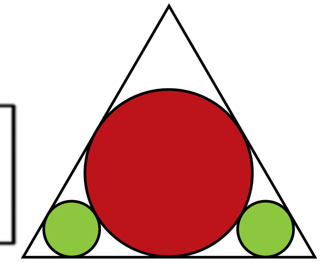


Figura 5

<u>La configuración de Lob y Richmond cubría casi el 74% del área mientras que la de Malfatti cubría menos del 73%.</u>

Más aún, Goldberg (1967) mostró que los círculos de Malfatti nunca son la mejor solución para el "problema del mármol" y Wells (1991) ilustró casos específicos en donde soluciones alternativas son claramente las óptimas.

Hubo que esperar casi dos siglos para obtener la respuesta general a esta interesante cuestión. Zalgaller y Los dieron una completa solución al "problema del mármol" en 1990.

Zalgaller y Los establecieron (lo publicaron en 1991) que para un triángulo ABC tal que $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ la solución del problema está dada por los círculos C_1, C_2 y C_3, donde C_1 es el incírculo, C_2 está inscrito en el $\angle A$ y es tangente externamente a C_1, mientras que C_3 es o bien el círculo inscrito en $\angle B$ y tangente externamente a C1 o bien el círculo inscrito $\angle A$ y tangente externamente a C2, dependiendo de si $\operatorname{sen}(A/2) \geq \tan(B/2)$ o si $\operatorname{sen}(A/2) \leq \tan(B/2)$.

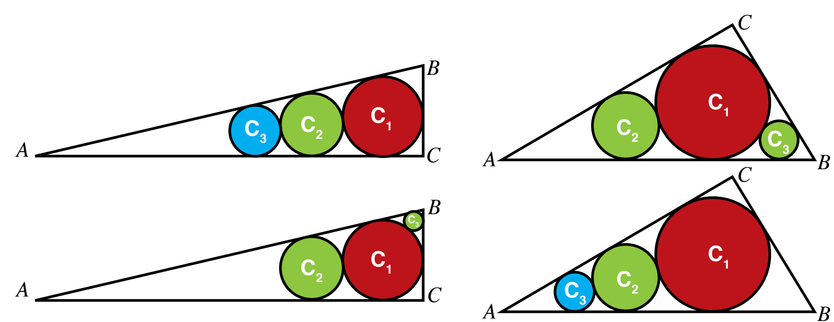
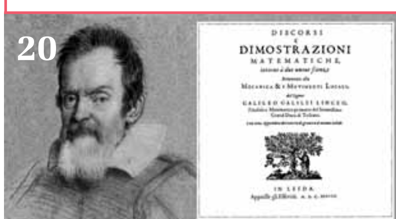


Figura 6

Walter O. Beyer K.
Universidad Nacional Abierta
nowarawb@gmail.com

ORM

FEBRERO 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		1 El número 325 tiene una propiedad especial: la suma de sus dos primeros dígitos es igual al tercer dígito. ¿Cuántos números de tres dígitos, menores que quinientos, tienen esa propiedad?	**2** María tiene en su casa gatos y loros. Ella cuenta en total 20 patas. ¿Cuál es el mayor número de gatos que ella puede tener?	**3** Cada día se corta un trozo de alambre de 20 cm de un rollo de alambre de 200 cm.¿En qué día se hará el último corte si el primer corte se hizo un lunes?
6 Pedro cobra un cheque de Bs. 560 en un banco y le dan billetes de Bs. 5 y de Bs. 2. El número de billetes de Bs. 5 es igual al número de billetes de Bs. 2. ¿Cuántos billetes de Bs. 2 le dieron?	**7** En una tienda de animales, un medio de los animales son perros, un décimo son peces, un quinto son pájaros y un cuarto del resto son seis gatos. ¿Cuántos animales hay en la tienda?	**8** El número de billetes de Bs. 2 que se pagan por un objeto excede en 9 al número de billetes de Bs. 5 que se deben pagar por el mismo objeto. Determina el costo del objeto	**9** ¿Cuál es el dígito en la posición de las unidades del menor número mayor que 1000, con todos sus dígitos diferentes?	**10** Pedro cortó la torta en partes iguales. Él se comió dos partes y su hermano una parte. Su mamá les dice que se comieron la mitad de la torta. ¿En cuántas partes Pedro cortó la torta?
13 Alejandro, Benito y Carlos se comen 7 helados en total. Cada uno de ellos se comió al menos un helado. Alejandro se comió más helados que cualquier otro y Carlos se comió menos helados que cualquier otro. ¿Cuántos helados se comió Benito?	**14** Ana tiene Bs. 147 y Luisa tiene Bs. 57. ¿Cuántos bolívares debe darle Ana a Luisa para que Ana tenga el doble de dinero que Luisa?	**16** Seis hermanos nacen con un intervalo de dos años. La edad del hermano mayor es dos veces la edad del hermano menor. ¿Qué edad tiene el hermano menor?	**16** ¿Cuántos números primos de dos cifras son tales que al invertir el orden de sus cifras se obtiene, nuevamente, un número primo?	**17** De una bolsa de caramelos, Ana se queda con la mitad de ellos y reparte el resto, en partes iguales, entre sus tres hermanos: Carlos, Daniel y Miguel. Si Miguel recibió 4 caramelos, ¿cuántos caramelos había inicialmente en la bolsa?
20  **Galileo Galilei** (1564–1642)	**21**  **Johannes Kepler** (1571–1630)	**22** En una tienda venden bombones de chocolate a Bs 6 cada uno. ¿Cuál es la mayor cantidad de bombones que puedo comprar si tengo dos billetes de Bs 20 y uno de Bs. 5?	**23** Actualmente, Tomás tiene 9 años y Ana, su mamá, tiene el triple de su edad. ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que Ana tenga el doble de la edad de Tomás?	**24** Un cubo cuya arista mide un metro se corta en cubitos de arista un decímetro. Si todos los cubitos se colocan uno encima de otro, ¿qué altura, en metros, alcanzan todos los cubitos?
27 ¿Cuál es la suma de todos los números naturales que dividen a 24?	**28** Seis cubos pequeños tienen el mismo peso de siete cilindros. Siete cilindros tienen el mismo peso de tres cubos grandes. Dos cubos grandes tienen el mismo peso de un paquete de chocolate de 200g. ¿Cuántos gramos pesa un cubo pequeño?	**29** La suma de los dígitos de un número de tres dígitos es 12. El dígito en la posición de las unidades excede al colocado en las decenas en 5 y al colocado en las centenas en 4. ¿Cuál es el número?		

Rithmomachia. La Batalla de los Números

Cuando tenía 18 años y estudiaba matemática en la UCV comencé a leer el primer libro de historia de la matemática que se me atravesó en el camino. Se trataba del clásico de la editorial Dover de David Eugene Smith. Al comienzo, no se diferenciaba mucho del resto de los libros que tratan sobre el tema pero al llegar a la página 198 me encontré con algo que definitivamente marcó mi vida como historiador de la matemática. Era una versión medieval del ajedrez que se llamaba Rithmomachia, Rithmomaquia o Rythmomachy en todas sus acepciones Rithmomachia significa en griego "La Batalla de los Números".

Diagrama tomado del trabajo de Bossière, 1554–1556.

No se sabe con exactitud quien inventó el juego pero, al parecer, hay un acuerdo entre los Historiadores en que fue Boecio o el mismísimo Pitágoras los posibles creadores de Rithmomachia. El juego cobró su fama entre los siglos XII y XIII y era muy común ver entre los estudiantes de las primeras universidades medievales donde se estudiaban las siete artes liberales, la práctica de Rithmomachia para desarrollar destreza numérica durante el curso del quadrivium (aritmética, geometría, música y astronomía). Se sabe que Roger Bacon ponía a sus estudiantes a jugar Rithmomachia. Los habitantes de la ciudad en la novela Utopía de Tomás Moro jugaban Rithmomachia al caer la tarde.

El juego se dispersó por Europa Occidental principalmente entre Inglaterra, Francia y Alemania. Esto trajo como consecuencia que existieran diferentes variantes de las reglas así como de los movimientos de las piedras. El primero en registrar los orígenes del juego fue Hermann Contractus (1013–1054) quien dió el primer significado etimológico de Rythmimachie por *"Juego de los Filósofos"*. El juego también es citado en un poema medieval llamado *De Vetula*.

"O utinam ludus sciretur Rythmimachie
Ludus Arithmeticae folium, flos fuctus et eius
Gloria laus et honor"

Gradualmente, las reglas se fueron recogiendo y ordenando por Contractus, Faber, Nemoriadus, Oresme, Asilo y de Bossière. Por desgracia, perdió popularidad en el siglo XVII tanto que Leibniz conocía nada más el nombre pero nada de las reglas.

El tablero era de 8x16 casillas de ajedrez y las piezas se disponían en los lados más pequeños. Cada jugador tenía 24 piezas (8 discos, 8 triángulos y 8 cuadrados). Las piezas blancas eran las pares y las negras, las impares. La distribución numérica de las piezas eran los primeros cuatro números pares 2, 4, 6 y 8 para las blancas y 3, 5, 7 y 9 para las negras. Luego se formaban combinaciones de suma y potencias para el resto de las piezas. El movimiento era ortogonal: un espacio para los discos, tres para los triángulos y cuatro para los cuadrados. Era común en todas las versiones no permitir el movimiento diagonal así como tampoco el cambio de movimiento en la trayectoria. Había cuatro tipos de capturas: por asedio, por encuentro, por emboscada y por asalto. Existían dos tipos de victorias: las menores que se formaban con las piezas capturadas del adversario denominadas De Corpore, De Bonis, De Lite, De Honore y De Honore Litique, combinando las dos últimas. Las victorias mayores eran practicadas por los jugadores avanzados. Éstas se formaban con las piezas capturadas del adversario y al menos una de las piezas propias. Las victorias mayores son: la Victoria Magna, que consistía en formar con un grupo de cuatro piezas una progresión aritmética, geométrica o armónica; la Victoria Mayor, cuando un grupo de cuatro piezas podían formar dos de las tres progresiones posibles. Pero, sin lugar a dudas, el clímax de los jugadores llegaba con la Victoria Excellentissima, cuando con un grupo de cuatro piezas podían combinarse para formar las tres progresiones posibles.

Recientemente encontré una fábrica de juegos exóticos antiguos llamada *Gothic Green Oak* en Leeds, Inglaterra, donde venden por 80£ esta hermosa edición hecha en madera.

Versión moderna de Rithmomachia.

En las Jornadas Matemáticas del año 2010 expuse, en la sesión de historia de la matemática, una charla divulgativa sobre Rithmomachia y quisiera agradecer la observación del profesor Douglas Jiménez, quien acotó que los numerales que probablemente fueron usados en este juego eran los romanos y no los arábigos, ya que la notación arábiga llegó a Europa luego del siglo XV. En la página web de los amigos de *Gothic Green Oak* aparece claramente cuando se inventó Rithmomachia y el hecho de que los numerales utilizados fueron los romanos y por ello, ponen a la venta tanto las fichas en números arábigos como en números romanos.

Tomás Guardia Ortega
Centro de Geometría
Universidad Central de Venezuela

Fuente del tablero de Rithmomachia: http://www.alexfedi.it/medioevo/risorse/rithmo-1.jpg

ORM

MARZO 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			1 ¿Cuántos números primos de dos cifras son tales que al multiplicar sus cifras se obtiene, nuevamente, un número primo?	**2** ¿Cuántos números de cuatro dígitos hay, tales que la suma de los dígitos sea 4 y su producto 0?
5 Ana multiplica dos números de dos dígitos cada uno. Del primer número se sabe que el dígito en el lugar de las decenas es 2 y del segundo se sabe que el dígito en el lugar de las unidades es 5. El producto obtenido por Ana es 945. ¿Cuáles son los posibles números que multiplicó Ana?	**6** La suma de las edades de los gemelos Juan y María es 30 años. Ellos nacieron cuando su mamá tenía 30 años. Dentro de 30 años, ¿cuántos años tendrá la mamá de los gemelos?	**7** ¿Cuál es la suma de los primeros veintiún números en la secuencia: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5,...?	**8** ¿Cuál es la diferencia entre la suma de los primeros 1000 números naturales pares y la suma de los primeros 1000 números naturales impares?	**9** Ana calcula la suma del mayor y del menor número de dos dígitos múltiplos de tres. Rosa calcula la suma del mayor y del menor número de dos dígitos que no son múltiplos de tres. ¿Cuál es la diferencia entre el número que calcula Ana y el que calcula Rosa?
12 Un listón de madera de 15 m se divide en el mayor número posible de trozos de diferentes tamaños cuyas longitudes sean números enteros de metros. ¿Cuántos cortes se realizaron al listón?	**13** Sea N el menor número de tres dígitos, con sus dígitos diferentes de cero y diferentes entre si, que es divisible entre cada uno de sus dígitos. La suma de los dígitos de N es:	**14** Ana colorea los cuadrados atravesados por las dos diagonales de una cuadrícula cuadrada. En total colorea 9 cuadrados. ¿Cuántos cuadrados en total tiene la cuadrícula?	**15** Canguro Matemático	**16** ¿Qué obtienes si divides la mitad de la mitad de la mitad entre la mitad de un cuarto?
19 	**20** Hay sesenta pájaros en las ramas de tres árboles. En cierto momento, del primer árbol se van 6 pájaros, del segundo 8 y del tercero 4. Y queda la misma cantidad de pájaros en cada árbol. ¿Cuántos pájaros había en el segundo árbol al comienzo?	**21** ¿Cuál es el mayor número de regiones en que se puede dividir un círculo al dibujar cuatro cuerdas del círculo?	**22** La letra en el lugar 2012 en la secuencia: C A N G U R O C A N G U R O C A N G U R O... es:	**23** María le envía un sobre a José a la 7:30 a.m. utilizando los servicios del Buho Negro, quien vuela 4 km en 10 minutos. El Buho Negro entregó el sobre a las 9:10 a.m. ¿Cuál es la distancia, en km, entre María y José?
26 Sobre dos rectas paralelas n y m se dibujan puntos: 5 en la recta n y 3 en la recta m. ¿Cuál es el número total de segmentos que se pueden dibujar cuyos extremos sean los puntos y estén uno en la recta n y el otro en la recta m?	**27** ¿Cuál es la suma de los números de dos dígitos múltiplos de 6 cuyos dígitos suman 6?	**28** Dos conejos pesan igual. Dos gatos pesan igual. El peso total de los dos conejos y de los dos gatos es 24 kilogramos. Un gato pesa 8 kilogramos. ¿Cuánto pesa, en kg, un conejo?	**29** A la derecha de un número de dos dígitos escribimos el mismo número obteniendo un número de cuatro dígitos. ¿Cuántas veces es mayor el número de cuatro dígitos que el número de dos dígitos?	**30** Víctor corta un papel de forma cuadrada y de perímetro 20 cm. en dos partes, en forma de rectángulos. Una de las partes tiene un perímetro de 16 cm. ¿Cuál es el perímetro, en cm, de la otra parte?

La Notación Científica

En el mundo vivimos 7×10^9 personas. La masa de un protón es $1,67 \times 10^{-27}$ kilogramos. La luz en el vacío recorre $9,46 \times 10^{15}$ metros por año. En almacenamiento de información, un *terabyte* equivale a aproximadamente $1,1 \times 10^{12}$ *bytes*. En química, el número de Avogadro que representa la cantidad de partículas básicas en una mol de una substancia es $6,0221415 \times 10^{23}$. Aparecen números similares incluso en referencias como la televisión, recordando por ejemplo que en el capítulo *Mi problema con los Popplers* de la serie de caricaturas *Futurama* se puede ver un cartel que habla de más de $3,8 \times 10^{10}$ *Popplers* vendidos.

¿Pero qué quieren decir estos números? ¿Qué significa y para qué se usa la estructura $a \times 10^b$? Sin esa forma de escribir los números el párrafo anterior diría algo como

> En el mundo vivimos 7 000 000 000 personas. La masa de un protón es 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 67 kilogramos. La luz en el vacío recorre 9 460 000 000 000 000 metros por año. En almacenamiento de información, un *terabyte* equivale a aproximadamente 1 100 000 000 000 *bytes*. En química, el número de Avogadro que representa la cantidad de partículas básicas en una mol de una substancia es 602 214 150 000 000 000 000 000 000. Aparecen números similares incluso en referencias como la televisión, recordando por ejemplo que en el capítulo *Mi problema con los Popplers* de la serie de caricaturas *Futurama* se puede ver un cartel que habla de más de 38 000 000 000 *Popplers* vendidos.

Como se puede ver, los números que estaban antes escritos de la forma $a \times 10^b$ al escribirse en la forma tradicional tienen una enorme cantidad de ceros, lo que los hace difíciles de manejar con exactitud a simple vista. Ese es uno de los objetivos fundamentales de lo que llamaremos **Notación científica**, introducir una forma conocida en todo el mundo para manejar números muy grandes o muy pequeños. Para esto es importante diseñar un sistema y darle unas reglas que haga que los números que ese sistema muestra sean manejables y utilizables por todos los que lo conozcan.

Las reglas del sistema de notación científica son las siguientes:

- Los números serán escritos de la forma $\mathrm{a} \times 10^{\mathrm{b}}$.
- El número a será un número no menor a 1 y siempre menor a 10 si es positivo, o no mayor a -1 y siempre mayor a -10 si es negativo.
- El número b debe ser siempre un número entero.

La primera de las condiciones explica por qué todos los números que aparecen en el primer párrafo tienen esa estructura en común. La segunda y la tercera regla combinadas tienen dos objetivos, hacer que la escritura de cada número sea única y que las operaciones para construir la escritura en notación científica de un número sean tan fáciles como mover el indicador de decimales en un sentido o en otro.

Para dar un ejemplo de cómo funciona la notación científica en un caso de un número pequeño y así dar una idea general, nótese cómo se haría para escribir en notación científica el número 2 012. 2012 se puede escribir de muchas formas como el producto de un número y una potencia de 10, por ejemplo como $2\,012 \times 10^0$ o como $20\,120 \times 10^{-1}$ o $20,12 \times 10^2$, entre otros. El beneficio de la notación científica es que, según las reglas de construcción, especialmente la segunda de ellas en este caso, ninguna de las formas de representación mostradas cumple las condiciones que se piden. Debido a las reglas segunda y tercera, es importante notar que 2 012 es mayor que 1 000 (10^3) pero menor que 10 000 (10^4), con lo que necesariamente se debe escribir 2 012 como un número multiplicado por 10^3. Para obtener el número que debe ser multiplicado basta entonces tomar 2 012 y desplazar el marcador decimal (en este caso no visible pero teóricamente ubicado a la derecha del dígito de las unidades) tres posiciones hacia la izquierda, llegando así a que la escritura correcta en notación científica para 2 012 es $2,012 \times 10^3$.

La siguiente condición que se debe analizar, aunque esto depende totalmente de la intención con la que se use la notación científica, es la precisión con la que se escriben los números en ella. Así, el número 123 456 789 se podría escribir como $1,23456789 \times 10^8$ lo que daría rápidamente la idea de que es un número mayor que 100 000 000 (10^8) pero menor que 1 000 000 000 (10^9) pero que es en muchos casos un nivel de precisión posiblemente inecesario, especialmente si el objetivo es simplemente saber si el número es mayor o menor que otro. Es el momento en el que aparece el concepto de *cifras significativas*, refiriéndose a la cantidad de cifras o dígitos que debe tener el número a que se usa en la notación científica. Así por ejemplo, volviendo a los ejemplos iniciales, el número de Avogadro reducido a cuatro cifras significativas sería $6,022 \times 10^{23}$, poniendo muchos menos decimales en a. De la misma forma, 123 456 789 reducido a cuatro cifras significativas sería $1,234 \times 10^8$, donde las otras cifras se eliminan por considerar que su posición las hace menos decisivas que las demás debido a la naturaleza grande o pequeña del número en cuestión.

Para entender el impacto de la notación científica en la noción del mundo alrededor, puede decirse por ejemplo que, siempre a cuatro cifras significativas, 20 personas pueden formarse en una línea de aproximadamente $2,433 \times 10^{18}$ formas, es decir, más de un millón de millón de millones (un trillón en la interpretación castellana de la palabra). La distancia en kilómetros de la tierra a la estrella más cercana (diferente al sol) que es Próxima Centauri es aproximadamente 4×10^{13} kilómetros, que para darse una idea de lo enorme que es significaría dar aproximadamente 1 000 000 000 vueltas alrededor de la tierra (la circunferencia de la tierra es aproximadamente 4×10^4 kilómetros).

Como puede verse una gran cantidad de números de magnitud astronómica o microscópica puede encontrarse en notación científica, por lo que un primer paso para entender muchos de los datos que se encuentran en la vida diaria es entender cómo funciona este método de escritura de números y cómo se puede interpretar. Este pequeño texto puede ser un primer paso en ese sentido.

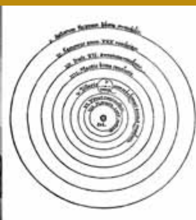
Oscar Bernal
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

ORM

ABRIL 2012

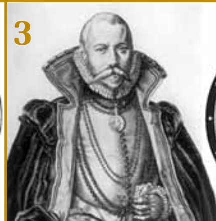
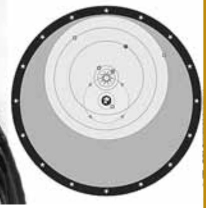
Lunes / Martes / Miércoles / Jueves / Viernes

2

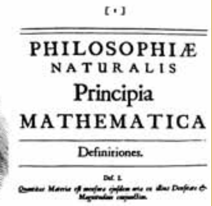
Nicolás Copérnico (1473–1543)

3

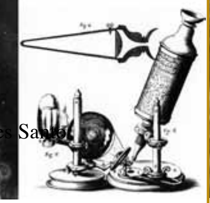
Tycho Brahe (1546–1601)

4

Isaac Newton (1642–1727)

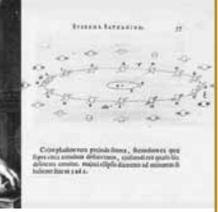
5

Jueves Santo

Robert Hooke (1635–1702)

6

Christiaan Huygens (1629–1695)

9 Elisa es 123 días mayor que su hermana Rosa. Este año Elisa celebra su cumpleaños un día jueves del mes de octubre. ¿En qué día de la semana Rosa celebra su cumpleaños?

10 Se dibujan dos rectas paralelas en una hoja. En una de las rectas se marcan 4 puntos y en la otra se marcan 2 puntos. ¿Cuál es el número total de triángulos cuyos vértices sean esos puntos marcados?

11 Un azul es igual a tres verdes, seis rojos es igual a tres azules y tres amarillos es igual a nueve rojos. ¿A cuántos verdes es igual diez amarillos?

12 El coro de una iglesia tiene 32 miembros. Doce de ellos tocan un instrumento y 8 de estos doce son hombres. El 60 % de las mujeres del coro no tocan ningún instrumento. ¿Cuántas mujeres hay en el coro?

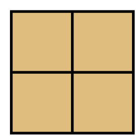
13 El promedio de 3 números es 21. Si se quita el número más pequeño, el promedio de los restantes 2 números es 27. ¿Cuál es el valor del número que se quitó?

16 ¿Cuáles cuatro frutas se deben escoger si se quieren exactamente 1 kg de frutas?

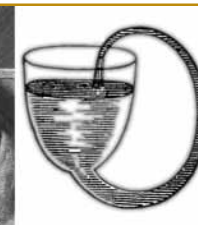
17 ¿Cuál es el número escondido en los cuadrados para que los pasos den como resultado 6?

$$\boxed{?} \xrightarrow{+1} \boxed{} \xrightarrow{-2} \boxed{} \xrightarrow{+3} \boxed{6}$$

18 ¿Cuántos rectángulos están visibles en esta figura?



19

Robert Boyle (1627–1691)

20 Las niñas de un salón forman un círculo. María está separada de Daniela por cinco niñas por la izquierda y por 6 niñas por la derecha. ¿Cuántas niñas hay en el círculo?

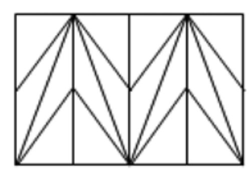
23 Un niño demora 6 minutos bajando las escaleras desde el décimo piso hasta la planta baja del edificio. ¿Cuánto tiempo le tomará para llegar desde el quinto piso hasta la planta baja?

24 ¿Cuántas posibilidades diferentes hay para reemplazar las estrellas por signos + ó − de manera que se obtenga la igualdad en

$$5 \star 4 \star 1 \star 3 \star 4 = 9?$$

25 Antonio tiene 4 sesiones de clase hoy. Entre cada par de sesiones tiene un descanso. Llevó una manzana, una pera y una naranja para comer en cada descanso. ¿Cuántas opciones de orden tiene Antonio para comerse las frutas?

26 ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



27 ¿Cuántas decenas hay en 138?

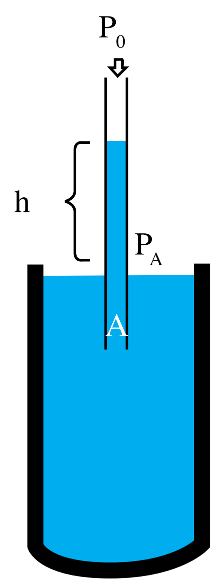
30 $20 \cdot 11 - 20 + 11$ es igual a:

Presión y Fluídos

Imaginemos por un momento un gigante que quiere tomar agua de un lago. Como es tan grande, se le hace muy dificil bajar a tomar agua directamente, por lo cual decide utilizar un pitillo gigante. ¿Cuál es la altura máxima desde la cual puede beber agua el gigante?

Para responder esto primero debemos ver qué ocurre cuando utilizamos un pitillo, y para esto debemos conocer algo sobre fluidos.

Cuando se sumerge un objeto en un fluido, como el agua y el aire, este fluido ejerce una fuerza sobre el objeto, perpendicular a la superficie. Esta fuerza por unidad de área se denomina presión. Así vemos que el aire alrededor de nosotros ejerce una presión sobre la superficie terrestre llamada presión atmosférica.



Resulta obvio ver que en una columna de líquido, la presión aumenta al aumentar la profundidad, ya que el peso del agua encima es mayor. Específicamente, el peso de una columna de agua es ρAhg siendo ρ la densidad del líquido, g la aceleración de gravedad, A el área transversal de la columna y h la altura de la columna. Entonces la presión ejercida por la columna de agua será $P = \frac{F}{A} = \rho hg$. Esto sumado con la presión en la parte superior de la columna (P_0) nos da la presión en la parte inferior:

$$P = P_0 + \rho gh \tag{1}$$

También se puede ver de esto que a una misma profundidad, la presión es constante sin importar la forma del contenedor.

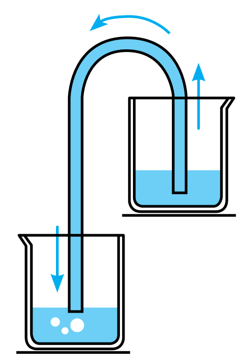
Cuando bebemos un líquido a través de un pitillo, lo que hacemos es extraer aire, disminuyendo la presión P_0 dentro del pitillo. Como la presión justo debajo del pitillo es mayor a la presión dentro del pitillo, el agua es empujada hacia arriba.

En la figura, vemos que la presión en el punto A es igual a $P_0 + \rho gh$, pero al mismo tiempo como la presión es constante a la misma profundidad, también es igual a la presión atmosférica P_A. Igualando y despejando h tenemos

$$h = \frac{P_A - P_0}{\rho g} \tag{2}$$

En la ecuación anterior sólo pueden variar h y P_o ya que la densidad del agua ρ, la presión atmosférica P_A y la aceleración de gravedad g son constantes en un lugar específico. Entonces se tiene que el mayor valor que puede alcanzar h es cuando $P_0 = 0$ es decir que hay un vacío absoluto dentro del pitillo. En este caso, $h = \frac{P_A}{\rho g} \approx 10m$. Así que para que el gigante pueda tomar agua debe estar a una altura menor de 10m.

Estos principios también explican por qué funciona un sifón. Un sifón está formado básicamente por un tubo en U invertido, con un extremo en un reservorio de algún líquido. Si se llena mecánicamente el tubo con el líquido y se coloca el otro extremo del tubo a una altura menor que la superficie del reservorio, el líquido fluirá continuamente por el tubo y saldrá por el orificio inferior.

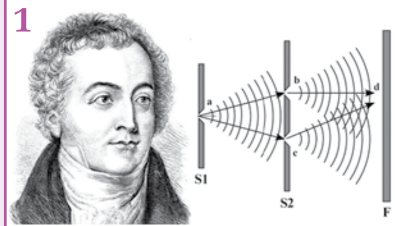
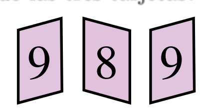


Este fenómeno es interesante porque significa que el líquido debe subir primero por el tubo de la derecha en contra de la gravedad. Esto ocurre porque cuando el líquido sale por el orificio de la izquierda se crea una región de baja presión en la parte superior del tubo que contrarresta el peso del líquido en la columna de la derecha, causando el flujo.

Sofia Taylor
Ex-olímpica
Estudiante de la Licenciatura de Física
Universidad Central de Venezuela

ORM

MAYO 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1  **Thomas Young** (1773–1829)	**2** De todos los números de 3 dígitos cuya suma de sus dígitos es igual a 8 se escogen el más grande y el más pequeño de estos. ¿Cuál es su suma?	**3** ¿Cuántos números de 3 dígitos tienen el producto de sus dígitos igual a 9?	**4** 99 niños llegaron al colegio en tres autobuses. Si 3 niños del primer autobus se montaran en el tercer autobus habría la misma cantidad de niños en los tres autobuses. ¿Cuántos niños llegaron en el primer autobus?
7 Una caja de té contiene 100 bolsas y cuesta 90 Bs mientras que la caja de 50 bolsas cuesta 50 Bs. ¿Cuánto nos ahorramos en cada bolsa de té si compramos la caja de 100 bolsas?	**8** En el cine hay 12 sillas en la última fila. Al lado de cada puesto hay una silla libre. ¿Cuánto es el número máximo de personas que pueden estar sentadas en esa fila?	**9** En la tienda venden cajas para almacenar 6 huevos o cajas para 12 huevos. Si queremos almacenar 66 huevos, ¿cuánto es el mínimo número de cajas que se tendrían que comprar?	**10** La diferencia entre la suma de los primeros diez números positivos múltiplos de 10 y la suma de los diez primeros números positivos múltiplos de 9 es:	**11** Si cada letra en el digrama denota un dígito (letras diferentes denotan dígitos diferentes), entonces la suma de $A+B+C+D+E$ es igual a: $\begin{array}{r} \text{BDCE} \\ +\,\text{BDAE} \\ \hline \text{AECBE} \end{array}$
14 Nicolás escoge un número, lo incrementa por una unidad y le resta al resultado 2. Luego, multiplica el resultado por 3. Finalmente, toma la respuesta y la divide por 4 siendo el cociente 6. ¿Cuál es el número inicial que Nicolás escogió?	**15** Mateo infló globos por 30 minutos. Cada 3 minutos contaba y verificaba que hubiera inflado 8 globos durante ese tiempo. Pero, cada 10 globos se le estallaba uno. ¿Cuántos globos infló Mateo?	**16** Juan compra 6 libros por el mismo precio. El paga 500 Bs y recibe de cambio 80 Bs. ¿Cuánto cuesta un libro?	**17** Se tienen 3 tarjetas con los números 8, 9 y 9. Si las tarjetas con el número 9 pueden leerse también como un 6, ¿cuántos números se pueden formar usando las tres tarjetas? 	**18** Marcos nos visita cada 4 días. Si hoy vino y es lunes, entonces volverá el viernes. ¿Cuántas semanas pasarán hasta que Marcos nos visite nuevamente un lunes?
21 	**22** En una maqueta, todos los edificios son copia de los edificios reales a escala 1:25. Se pintaron las puertas de un edificio real con 7,5 litros de pintura. ¿Cuántos mililitros se necesitarán para pintar las mismas puertas en la maqueta?	**23** Un cerdo cuesta igual que 25 conejos. Un conejo cuesta igual que 3 gallinas y una gallina cuesta igual que 36 huevos. ¿Cuántos huevos equivalen al precio de un cerdo?	**24** ¿Cuánto es la mayor diferencia posible entre dos enteros positivos formados por 3 dígitos diferentes escritos en orden decreciente y cuyo primer dígito es 8?	**25** ¿Cuánto es la mitad del triple del doble de un tercio de 2?
28 ¿Cuantós dígitos tiene el cuadrado del número 111111111?	**29** Alejandro dice que Pablo miente. Pablo dice que Marcos miente. Marcos dice que Pablo miente. Tomás dice que Alejandro miente. ¿Cuántos chicos mienten?	**30** Los números a, b y c tienen la propiedad de que la media de a y b sea 17 y la media entre a, b, c sea 15. ¿Cuál es el valor de c?	**31** ¿Cuál es la mayor cantidad posible de enteros positivos diferentes cuya suma es igual a 43?	

XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. OMCC 2011

La Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, OMCC, es una competencia dirigida a estudiantes de escuela secundaria con poca o ninguna experiencia internacional previa en este tipo de eventos. Se organiza anualmente desde 1999 y en un comienzo, con el auspicio de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, OEI, se convocó a todos los países de habla hispana de la región, a saber, Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela. A partir del año 2010, se invitan también a Jamaica, Islas Vírgenes y Trinidad y Tobago.

Cada delegación asiste con un máximo de tres estudiantes y dos profesores. La organización de la OMCC sigue el patrón de la Olimpiada Internacional de Matemáticas. Durante dos días consecutivos los estudiantes presentan dos exámenes, cada uno compuesto por tres problemas inéditos. Los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce y menciones honoríficas. Las menciones se otorgan a cada alumno que haya dado una solución completa a un problema de los seis propuestos, pero no tenga la puntuación mínima necesaria para obtener una medalla de bronce. Es esta competencia también se da un premio, la Copa El Salvador, al equipo que haya mostrado un mayor avance durante dos años consecutivos.

Este año, del 16 al 26 de Junio se celebró en Colima, México, la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, con la asistencia de 12 países y 33 estudiantes. Cuba fue el único ausente a la cita y Jamaica participó por segundo año consecutivo. Nuestra delegación estuvo integrada por los estudiantes Rubmary Rojas del colegio Divina pastora de Barquisimeto, Sergio Villarroel, del colegio San Lázaro de Cumaná, y Evelin Hernao del colegio Altamira de Maracaibo. Rubmary Rojas ganó medalla de plata y Sergio Villarroel, ganó medalla de bronce. Los jóvenes estuvieron acompañados del profesor José Nieto de la Universidad del Zulia, como jefe de la delegación y Carmela Acevedo, estudiante de matemáticas, como tutora.

Terminamos mostrando los problemas de esta OMCC.

Primer Día

Problema 1. En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

Problema 2. Sean ABC un triángulo escaleno, D el pie de la altura desde A, E la intersección del lado AC con la bisectriz del $\angle ABC$, y F un punto sobre el lado AB. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sean X, Y, Z los puntos donde se cortan las rectas AD con BE, BE con CF, CF con AD, respectivamente. Si XYZ es un triángulo equilátero, demuestra que uno de los triángulos OXY, OYZ, OZX es un triángulo equilátero.

Problema 3, *Aplicar un desliz* a un entero $n \geq 2$ significa tomar cualquier primo p que divida a n y reemplazar n por $\frac{n+p^2}{p}$. Se comienza con un entero cualquiera mayor o igual a 5 y se le aplica un desliz. Al número así obtenido se le aplica un desliz, y así sucesivamente se siguen aplicando deslices. Demuestra que, sin importar los deslices aplicados, en algún momento se obtiene el número 5.

Segundo Día

Problema 4 Encuentra todos los enteros positivos p, q y r, con p y q números primos, que satisfacen la igualdad

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(p+1)(q+1)} = \frac{1}{r}.$$

Problema 5. Los números reales positivos x, y, z son tales que

$$x + \frac{y}{z} = y + \frac{z}{x} = z + \frac{x}{y} = 2.$$

Determine todos los valores posibles de $x + y + z$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Sean Y y Z los pies de las perpendiculares desde B y C sobre FD y DE, respectivamente. Sea F_1 la reflexión de F con respecto a E y sea E_1 la reflexión de E con respecto a F. Si $3EF = FD + DE$, demuestre que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.

Nota: La *reflexión* de un punto P respecto a un punto Q es el punto P_1 ubicado sobre la recta PQ tal que Q queda entre P y P_1, y $PQ = QP_1$.

Rafael Sánchez Lamoneda
Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas.
Universidad Central de Venezuela.

ORM

JUNIO 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				1 La competencia Canguro Matemático 2011 terminó el 13 de marzo a las 5:00pm (jueves). 2011 horas más tarde se entregaron los resultados. ¿Qué día de la semana se supieron los ganadores?
4 María le regaló la misma cantidad de caramelos a cada una de sus 5 amigas. Tres de ellas se comieron 5 caramelos cada una y quedaron las tres con la misma cantidad de caramelos que recibieron las otras dos niñas. ¿Cuántos caramelos recibió cada amiga?	**5** Dos números de 4 dígitos tienen los mismos dígitos. ¿Cuál es la mayor diferencia posible entre esos números?	**6** La suma de tres números enteros es 100. Si se resta un mismo número a cada uno de estos tres se obtiene 7, 13 y 32. ¿Cuáles son los números originales?	**7** Un reloj digital muestra las 20:11. ¿Después de cuánto tiempo el reloj mostrará el mismo set de dígitos, no necesariamente en el mismo orden?	**8** Había 12 niños en la fiesta. Los niños tenían 6, 7, 8, 9 y 10 años. 4 de ellos tenían 6 años pero la edad más común fue 8. ¿Cuál es la media de las edades de los niños de la fiesta?
11 	**12** ¿Cuántos números enteros de 5 dígitos, $abcde$, formados con los cinco dígitos diferentes del 2 al 6, cumplen que ab es un múltiplo de 2, abc es un múltiplo de 3, $abcd$ es un múltiplo de 4 y $abcde$ es un múltiplo de 5?	**13** Luis me vino a visitar. El salió de su casa a las 9:20am y llegó a la mia a las 10:44am. El retorno a su casa lo hizo el doble de rápido logrando llegar a las 2:45pm. ¿Cuánto tiempo estuvo en mi casa?	**14** Alana y Beatriz venden camisas y bufandas. Ellas ganan igual por dos camisas que por cinco bufandas. Alana vendio 4 camisas y 6 bufandas y gano 96 Bs. Beatriz vendió 2 camisas y 3 bufandas. ¿Cuánto ganó Beatriz?	**15** XIV OMCC (Junio 15-23, El Salvador)
18 Cristian escribe todas las fechas del año 2012 como día-mes-año (por ejemplo, el 15 de marzo fue escrito como 15.03.2012). ¿Cuántas veces Cristian escribió el número 3?	**19** Cinco amigas se van de viaje y aun cuando quisieran estar todas juntas sólo hay acomodación doble y triple en las habitaciones del hotel. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ubicarse en las habitaciones?	**20** Cuando 2011 es dividido por un número, el resto es 511. ¿Puede ser 500 el divisor?	**21** Todos los números de 4 dígitos cuya suma de los dígitos es 4 se escriben en orden ascendente. ¿En que puesto de la secuencia se encuentra el número 2011 situado?	**22** ¿Cuántos números de 6 dígitos contienen al número 2011 como parte de su representación decimal?
25 Victor escribió un número de 6 dígitos divisible por 12. Nicolás le borró el último dígito obteniendo 25762. ¿Cuál dígito fue borrado?	**26** La suma de los dígitos del número $10^{101} - 9$ es igual a:	**27** De todos los números de 3 dígitos cuya suma de los dígitos es igual a 8, se escogen el mayor y el menor número. ¿Cuál es la suma de éstos?	**28** ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con el usando solamente los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4?	**29** Patricia suma los números impares en orden hasta obtener el valor de 100. ¿Cuál es el último número impar que Patricia usó?

52ª Olimpiada Internacional de Matemáticas. IMO 2011

La Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO por sus siglas en inglés, es una competencia a la cual se dan cita los mejores estudiantes de matemáticas de escuela secundaria de todo el mundo. Fue en el año 1959 cuando Rumanía la organizó por primera vez y desde entonces, todos los años, a excepción de 1980, más de cincuenta países de los cinco continentes acuden a la cita.

La IMO se lleva a cabo durante doce días. Los cuatro primeros son de intensa actividad para el jurado internacional, que está conformado por los jefes de cada una de las delegaciones participantes. Durante esos días es responsabilidad del jurado producir los dos exámenes de la competencia sobre la base de un banco de problemas inéditos que previamente ha conformado el país organizador con problemas que los países participantes han enviado con anterioridad. El resto de las delegaciones, estudiantes y profesores tutores, llegan el día antes del acto inaugural, el cual consiste en discursos de las autoridades del pais organizador, un vistoso desfile de todas las delegaciones y un acto cultural. Así la escena está lista para los dos días de competencia. Los jóvenes se enfrentan a dos exámenes, uno por día, cuya duración es de cuatro horas y media, y que constan, cada uno, de tres problemas. Finalizados los exámenes los estudiantes tienen una serie de actividades deportivas y recreativas, mientras los profesores corrigen las pruebas de sus alumnos y defienden esa calificación ante los tribunales de corrección, donde finalmente se determinan las puntuaciones de cada participante y se asignan los premios, medallas de oro, plata y bronce y menciones honoríficas. Las menciones se otorgan a cada alumno que haya dado una solución completa a un problema de los seis propuestos, pero no tenga la puntuación mínima necesaria para obtener una medalla de bronce. La IMO cierra con un día de excursión y el acto de premiación, siempre vistoso y emotivo.

El año pasado, la 52ª IMO, se realizó en Amsterdam, del 12 al 24 de Julio, con la participación de 101 países y 564 estudiantes, cada delegación asiste con un máximo de seis estudiantes un jefe y un tutor. Se contó con la asistencia de dos nuevos países en calidad de observadores, Senegal y Uganda. Nuestra delegación la conformaron dos alumnos, Diego Peña Colaiocco del colegio Los Hipocampitos, estado Miranda y Carlos Lamas Bárcenas del colegio Independencia de Barquisimeto. Ambos jóvenes ganaron mención honorífica. La tutora de la delegación fue la profesora Laura Vielma Herrero y el jefe el profesor Rafael Sánchez Lamoneda.

Los problemas de esta IMO son los que mostramos a continuación.

Primer Día

Problema 1. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma $a_1+a_2+a_3+a_4$ por s_A. Sea n_A el número de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para las cuales $a_i + a_j$ divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

Problema 2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En $\mathcal{S}$ no hay tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta ℓ que pasa por un único punto $P \in \mathcal{S}$, al cual llamaremos pivote. Se rota ℓ en el sentido de las manecillas del reloj con centro en el pivote P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$ al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro, (pivote), se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentra otro punto de $\mathcal{S}$. Este proceso continúa indefinidamente, siendo siempre el centro de rotación un punto de $\mathcal{S}$.

Demostrar que se puede elegir un punto $P \in \mathcal{S}$ y una recta ℓ que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como un centro de rotación un número infinito de veces.

Problema 3. Sea f una función del conjunto de los números reales en si mismo que satisface

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para todos los números reales x, y. Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \leq 0$.

Segundo Día

Problema 4. Sea Sea $n > 0$ un entero. Se dispone de una balanza de dos platillos y de n pesas cuyos pesos son $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Se coloca cada una de las pesas en la balanza, de una en una, mediante una sucesión de n movimientos. En el primer movimiento se elige una pesa y se coloca en el platillo izquierdo. En cada uno de los movimientos siguientes se elige una de las pesas restantes y se coloca en el platillo de la izquierda o en el de la derecha. Determinar el número de formas de llevar a cabo estos n movimientos de manera tal que en ningún momento el platillo de la derecha tenga más peso que el platillo de la izquierda.

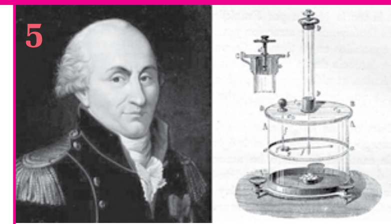
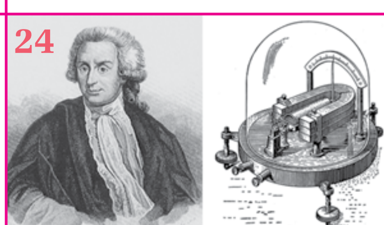
Problema 5. Sea f una función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros positivos. Se supone que para cualesquiera dos enteros m y n, la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m-n)$. Demostrar que para todos los enteros m y n con $f(m) \leq f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Sean ℓ una recta tangente a Γ, y sean ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c las rectas que se obtienen al reflejar ℓ con respecto a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo determinado por las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c es tangente a la circunferencia Γ.

Rafael Sánchez Lamoneda
Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas.
Universidad Central de Venezuela.

OJM

JULIO 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2  	**3** Si $a = 2$ y $b = 3$, ¿cuál es el valor de $a^b + a + ab + b + b^a$	**4** 53a IMO (Julio 4-16, Mar del Plata, Argentina)	**5**  **Charles Coulomb** (1736–1806)	**6** Halle el valor de las unidades del producto de todos los números impares desde el 1 hasta el 2011.
9 ¿Cuál es la mayor suma posible de los dígitos que se pueden ver en un reloj digital que muestra horas y minutos en formato 24 horas?	**10** El producto de los números naturales del 1 al 11 es 399?6800. ¿Cuál es el dígito que debe estar en el espacio del signo de interrogación?	**11** ¿Al menos cuántos dígitos hay que cambiar por ceros en la operación $222 + 333 + 444 + 555$ para que el resultado final sea 987?	**12** La suma de los recíprocos x e y es 12, la de los recíprocos de y y z es 7 y la de los recíprocos de x y z es 11. ¿Cual es el valor de la expresión $\frac{1}{x} \div \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}$?	**13** Si el 13 de julio de 2010 fue martes, ¿cuál es el próximo año en el que el 13 de julio sea martes también?
16 ¿Cuántos ceros hay al final del resultado del producto de los números del 1 al 20?	**17** Halle un número de dos dígitos cuyo cuadrado termine con tres números iguales.	**18** Jorge escoge un patrón y escribe los números 1, 4, 8, 13, 19, 26. ¿Cuál sería el próximo número de la secuencia usando el mismo patrón?	**19** Dividiendo un número por 33 obtenemos 22 como cociente y 11 como resto. El resto de dividir el número entre 121 es:	**20** ¿Cuál es la mayor cantidad posible de enteros consecutivos de 3 dígitos tales que cada uno de ellos tenga al menos un dígito impar?
23 ¿Cuántos números de 3 dígitos pueden ser representados como el producto de seis dígitos diferentes?	**24**  **Luigi Galvani** (1737–1798)	**25** Para algunos números de 3 dígitos, la suma de sus dígitos es igual al producto de ellos. ¿Cuántos números de 3 dígitos poseen esta propiedad?	**26** ¿Cuántos enteros son 20 veces la suma de sus dígitos?	**27** Sea $S = 1^2+2^2+3^2+\ldots+2012^2$. El último dígito de S es igual a:
30 El primer día del año en 2001 fue lunes. ¿Qué día de la semana será el primer día del año 2051?	**31** ¿Cuántas soluciones diferentes tiene $a \cdot bcdd = dccaa$ en la que letras diferentes corresponden a dígitos diferentes?			

El Árbelos: Lienzo de los Geómetras

Cada uno de los subconjuntos del plano que se muestran en la figura 1 se llama árbelos. Son regiones del plano por demás hermosas que poseen propiedades muy interesantes. Matemáticos de distintas épocas han pintado sobre árbelos verdaderas obras maestras de la geometría.

Figura 1

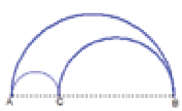


Figura 2

La palabra *árbelos* proviene del griego y significa *cuchilla de zapatero*. Pero, geométricamente, ¿cómo se define un árbelos? En referencia a las notaciones que se muestran en la figura 2, sean A y B dos puntos distintos y C es un punto cualquiera de $\overline{AB}$. Consideremos las semicircunferencias cuyos diámetros son $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{CB}$ y que están a *un mismo lado de* $\overline{AB}$. La región del plano comprendida entre estas semicircunferencias es un árbelos.

Veamos algunas propiedades métricas de un árbelos. Determinemos, en primer lugar, su longitud L. Por definición, L es la suma de las longitudes de las semicircunferencias de diámetros $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{CB}$. Recordemos que la longitud de una semicircunferencia es la mitad del producto de π y su diámetro. Por tanto,

$$L = \frac{\pi AB}{2} + \frac{\pi AC}{2} + \frac{\pi CB}{2} = \frac{\pi}{2}\left(AB + AC + CB\right) = \frac{\pi}{2}\left(AB + AB\right) = \pi AB$$

En consecuencia, la longitud L del árbelos es igual a la longitud de la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y, ¿cuál es su área?. Denotemos por S el área del árbelos. Por definición de esta figura, S es la diferencia entre el área del semicírculo de diámetro $\overline{AB}$ y la suma de las áreas de los semicírculos de diámetros $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$. Esto es,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} - \left[\frac{\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{CB}{2}\right)^2}{2}\right] & (3)\\ &= \frac{\pi AB^2}{8} - \frac{\pi AC^2}{8} - \frac{\pi CB^2}{8} = \frac{\pi}{8}\left(AB^2 - AC^2 - CB^2\right) & (4)\end{aligned}$$

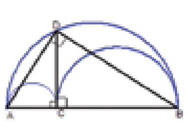


Figura 3

Consideremos el segmento $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$, siendo D punto de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ (ver figura 3). Por esta construcción, los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle BDC$ son triángulos rectángulos, cada uno con ángulo recto en el vértice C. Ahora bien, el triángulo $\triangle ADB$ también es rectángulo con ángulo recto en el vértice D, ya que está inscrito en una circunferencia y uno de sus lados es un diámetro de ésta.

Entonces, por el teorema de Pitágoras, tenemos que $AD^2 = AC^2 + CD^2$ y $DB^2 = CD^2 + CB^2$ y $AB^2 = AD^2 + DB^2$. De estas igualdades, obtenemos $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2CD^2$ (2). Sustituyendo (2) en (1), llegamos a que

$$S = \frac{\pi}{8}\left(AC^2 + CB^2 + 2CD^2 - AC^2 - CB^2\right) = \frac{\pi}{4}CD^2 = \pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2$$

En consecuencia, el área del árbelos es igual al área del círculo de diámetro $\overline{CD}$. Arquímedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) hizo un estudio sobre el árbelos en su obra *Liber Asumptorum* o Libro de los Lemas y, entre otras propiedades, expone la siguiente: los círculos inscritos en las regiones ADC y CDB tienen el mismo diámetro (ver figura 4), el cual es el cociente del producto de los diámetros de las semicircunferencias menores y el diámetro de la semicircunferencia mayor. Con las notaciones adoptadas en este artículo, significa que el diámetro de estos círculos es $\frac{AC \cdot CB}{AB}$. En la literatura actual sobre el tema, estos círculos se denominan *Círculos Gemelos de Arquímedes*.

Figura 4

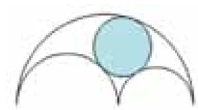


Figura 5

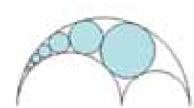


Figura 6

Pappus de Alejandría (290 - 350) escribió sobre el árbelos en el libro IV de su maravillosa obra *Synagoge* o *la Colección Matemática*. En él desarrolla una serie de lemas y teoremas que sustentan la construcción del círculo inscrito en un árbelos (figura 5), llamado *Círculo de Pappus*. Éste es el primero de una sucesión infinita de círculos denominada Cadena de Pappus: cada círculo de esta sucesión es tangente al anterior y a los dos semicírculos mayores del árbelos. En la figura 6 se muestra una cadena de Pappus.

Para saber más sobre el árbelos, recomendamos visitar:
http://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html
http://www.cut-the-knot.org/proofs/arbelos.shtml

Fabiola Irene Czwienczek Miler
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico de Maracay

OJM

AGOSTO 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		1 Si en un autobus hay 10 asientos vacíos. ¿En cuántas formas pueden sentarse 7 personas?	**2** ¿Cuál es el número total de permutaciones que pueden formarse con las letras de la palabra MATEMATICA?	**3** ¿Cuántos números de 5 dígitos y capicúas pueden formarse con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?
6 Seis niñas desean formar una ronda tomándose de las manos. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo?	**7** En la frutería hay mangos, peras y naranjas. ¿De cuántas maneras se pueden escoger seis frutas?	**8** ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en hilera todas las fichas blancas de ajedrez, si no son distinguibles entre sí las del mismo tipo? (Por ejemplo los 8 peones).	**9** ¿Cuántos triángulos quedan determinados por 6 puntos, tales que no haya 3 alineados?	**10** Tres personas suben en la planta baja al ascensor de un edificio que tiene 5 pisos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ir saliendo del ascensor si en ningún piso baja más de una persona?
13 	**14** ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con los dígitos del 1 al 9?	**15** ¿De cuántas maneras se pueden repetir 8 personas en dos grupos de 4 personas cada uno?	**16** En un edificio en el que viven 25 personas adultas hay que formar una comisión interna de 3 personas. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?	**17** ¿De cuántas maneras se pueden escoger cuatro números del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ de modo que no haya dos de ellos consecutivos?
20 ¿Cuántas palabras de 5 letras pueden formarse, tengan o no sentido, usando las letras de la palabra CUADERNO?	**21** ¿Cuántos equipos de fútbol se pueden formar con los 20 alumnos de un curso?	**22** ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las 24 letras del alfabeto griego?	**23** ¿De cuántas maneras se pueden bajar de un ascensor 4 personas, en un edificio que tiene 7 pisos?	**24** Con 3 mujeres y 5 varones, ¿cuántas hileras de 7 personas se pueden formar si personas del mismo sexo no pueden ocupar lugares consecutivos?
27 ¿De cuántas maneras pueden alinearse 10 personas, si 3 de ellas deben estar juntas?	**28** ¿Cuántos caracteres se pueden formar con los puntos y rayas del alfabeto Morse, si en cada uno entran hasta 4 de tales elementos?	**29** ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 libros en un estante, si 4 deben ocupar los lugares predeterminados, aún cuando estos 4 puedan intercambiarse entre sí?	**30** ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila 6 hombres, no pudiendo uno determinado estar nunca a la cabeza?	**31** ¿Cuántos paralelogramos quedan determinados cuando un grupo de 8 rectas paralelas son intersecadas por otro grupo de 6 rectas paralelas?

XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. OIM 2011

La Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, es una competencia dirigida a estudiantes no mayores de 18 de edad. Su origen data del año 1985 cuando Colombia y la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, OEI, convocaron a todos los países de habla hispana y portuguesa de América Latina así como a España y Portugal, a participar en la I OIM. Los países que anualmente concurren a esta cita son: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela. Cada delegación asiste con un máximo de cuatro estudiantes y dos profesores. La organización de la OIM sigue el patrón de la Olimpiada Internacional de Matemáticas.
Durante dos días consecutivos los estudiantes presentan dos exámenes, cada uno compuesto por tres problemas inéditos. Los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce y menciones honoríficas. Las menciones se otorgan a cada alumno que haya dado una solución completa a un problema de los seis propuestos, pero que no alcance la puntuación mínima necesaria para obtener una medalla de bronce. En esta competencia, al igual que en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, se otorga un premio al equipo que haya mostrado un mayor avance durante dos años consecutivos, la Copa Puerto Rico. Cabe señalar que históricamente esta copa es previa a la Copa El Salvador.

La OIM 2011, se celebró en San José de Costa Rica, con la asistencia de veinte países, faltando Cuba y República Dominicana. Nosotros asistimos con tres estudiantes, Diego Peña del colegio Los Hipocampitos del Estado Miranda, Rubmary Rojas del colegio Divina Pastora de Barquisimeto y Sergio Villarroel del colegio San Lázaro, de Cumaná. Diego ganó medalla de bronce y tanto Rubmary, como Sergio ganaron menciones honoríficas. La jefe de delegación fue la profesora Laura Vielma de la Academia Washington y la tutora Estefanía Ordaz, alumna de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Simón Bolívar.

Los dejamos ahora con los problemas de esta OIM.

Primer Día

Problema 1. En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana. Cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que obtiene al aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicarlo por 2, o multiplicarlo por 3, o sumarle 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual que 2011 gana. Hallar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Problema 2. Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres números enteros no nulos x, y, z tales que

$$x+y+z=0 \quad y \quad \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}=\tfrac{1}{n}.$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo y sean X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Suponga que C_1, C_2 y C_3 son circunferencias con cuerdas YZ, ZX, XY, respectivamente, tales que C_1 y C_2 se corten sobre la recta CZ y que C_1, C_3 se corten sobre la recta BY. Suponga que C_1 corta a las cuerdas XY y ZX en J y M respectivamente, que C_2 corta a las cuerdas YZ y XY en L e I, respectivamente, y que C_3 corta alas cuerdas YZ y ZX en K y N, respectivamente. demostrar que I, J, K, L, M y N están sobre una misma circunferencia.

Segundo Día

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AB \neq BC$, y sea O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.

Problema 5. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 \;\; \geq \;\; (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

Problema 6. Sean k y n números enteros positivos, con $k \geq 2$. En una línea recta se tienen kn piedras de k colores diferentes de tal forma que hay n piedras de cada color. Un *paso* consiste en intercambiar de posición dos piedras adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr, con a lo sumo m *pasos*, que las n piedras de cada color queden seguidas si:

- n es par.
- n es impar y $k=3$.

Rafael Sánchez Lamoneda
Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas.
Universidad Central de Venezuela.

OJM

SEPTIEMBRE 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 En una ciudad A los números telefónicos se forman con 4 dígitos (0 a 9) no pudiendo ser cero el primero de ellos, y en otra ciudad B con 5 dígitos con las mismas condiciones. ¿Cuántas comunicaciones pueden mantenerse entre los abonados de ambas ciudades?	**4** La suma de los números naturales del 1 al n es un número de 3 dígitos cuyos dígitos son iguales. ¿Cuántos números hay en la suma?	**5** En un oasis en el desierto, hay dromedarios con una sóla joroba y camellos con dos jorobas. Si se cuentan 28 cabezas y 45 jorobas, ¿Cuál es el número de dromedarios de una joroba?	**6** El número de días en el año se puede calcular al efectuar $10 \cdot 10 + 11 \cdot 11 + 12 \cdot 12 = 100 + 121 + 144 = 365$. Halle dos enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.	**7** Marta vio gallinas y caballos en la granja. Si contó 32 cabezas y 104 patas en total, ¿cuántos caballos vio Marta?
10 ¿Cuál es el menor número de dos dígitos que no puede ser expresado en la forma $a \times b + c$ donde a, b, c son dígitos diferentes?	**11** Un gato pesca 18 peces en 3 días. Cada día captura uno más que el día anterior pero en el tercer día ha capturado menos que los primeros dos. ¿Cuántos peces pescó el gato en el tercer día?	**12** Daniel trata de conseguir valores enteros de m, n, p y q para hacer que las cuatro expresiones siguientes sean iguales a un múltiplo de 3: $$m, 2n+3, 4p+5, 6q+7.$$ ¿Para cuántas de las expresiones es ésto posible?	**13** Sea DE un segmento con longitud 2. ¿Cuántos puntos F diferentes se pueden encontrar en el plano tal que el triángulo DEF sea recto y de área 1?	**14** Si se tiene un número positivo a mayor que 1 y un número positivo b menor que 1, y las operaciones básicas de $+, -, \times$, muestre qué operación entre ellos generaría el mayor resultado.
17 Halle la razón entre el doble cuadrado del triple cubo de un número distinto de cero y el triple cubo del doble del cuadrado del mismo número.	**18** Cuatro círculos se encuentran en un plano. Lo único que sabemos es que cualquiera 2 de ellos tienen exactamente un punto en común. ¿Cuál es el menor número posible de puntos en el plano que deben pertencer a más de un círculo?	**19** Hallar el lado de un triángulo equilátero que tiene un punto interior al triángulo con distancias $\sqrt{3}$cm, $\sqrt{13}$cm y $\sqrt{13}$cm, respectivamente a cada vértice.	**20** Sea KLM un triángulo isósceles con área 3 y la medida de su base KL igual a 3. ¿Qué podemos decir del triángulo KLM con respecto a sus ángulos?	**21** 2011 es un número especial ya que la suma de sus dos primeros dígitos es igual a la suma de los últimos dos. ¿Cuántos otros números menores que él y mayores que 1000 tienen esa propiedad?
24 En mi calle hay 17 casas y se encuentran numerados de un lado las pares y del otro las impares. Elsa vive en la última casa del lado par con número 12. Yo vivo en la última casa del lado impar. ¿cuál es el número de mi casa?	**25** ¿Cuál es el valor del entero positivo n si n y $n+1$ son los enteros consecutivos más pequeños tales que la suma de los divisores de n es igual a la suma de los divisores de $n+1$?	**26** ¿Cuál es el mayor valor: 12 % de 75, 75 % de 12 o 30 % de 30?	**27** Halle la suma de los dígitos del número $2^{2008} \cdot 5^{2011}$	**28** ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $255^2 - 1$?

Elaboración de Modelos Didácticos para la Enseñanza de las Cónicas y de sus Propiedades

Como no disponíamos de recursos para la enseñanza de las cónicas, decidimos construir modelos interactivos donde el alumno aprenda el origen, trazado manual y las propiedades reflectoras de las mismas de manera sencilla y practica.

Para fabricar el material didáctico que se usará para mejorar la calidad de la enseñanza de las cónicas se procedió así:

⋆ Para representar el origen de las Cónicas, se construyeron dos conos de madera, los cuales se cortaron con una sierra para obtener las cónicas.

⋆ Para ilustrar la propiedad reflectora de la elipse, se construyo en MDF una mesa miniatura de pool en forma elíptica, con un acabado de textura lisa para disminuir la fuerza de roce y permitir un buen deslizamiento sobre ella, y con bordes hechos de foami. Se impulsa una metra de tal manera que su trayectoria pase por uno de los focos y así, al tocar el borde de la mesa de pool, pase por el otro foco.

⋆ Representación gráfica de las cónica acorde a la variación de sus parámetros, en una superficie del mismo material que el de una pizarra acrílica, se abrieron orificios para representar los focos, y con el uso de un marcador y un hilo, trazaremos cónicas con focos a distintas distancias para representar el objetivo.

⋆ Para ilustrar la propiedad reflectora de la parábola, se construyo en madera un arco parabólico con un borde suave unido con una base también de madera con una superficie lisa. Sobre la superficie se trazan líneas paralelas al eje de simetría del arco parabólico y segmentos desde el foco a la parábola.

Cuando la metra sea impulsada en dirección paralela al eje de la parábola toca el borde parabólico, está rebota pasando por el foco.

Luis Núñez
UNEXPO-Puerto Ordaz
Andreína Núñez, Andrea Chávez,
José Martínez, Ana Vásquez
U. E. Colegio Los Próceres. Puerto Ordaz.

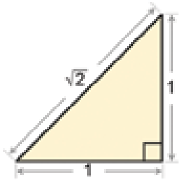
OJM

OCTUBRE 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 Tres amigos fueron de pesca. En total pescaron 28 truchas. Simón pescó la mayor cantidad: dos veces más que Ricardo. Samuel pescó 4 truchas menos que Ricardo. ¿Cuántas truchas pescó Ricardo?	**2** $\dfrac{2011 \cdot 2.011}{201.1 \cdot 20.11} =$	**3** La suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos excede al mayor número en 4 veces la suma de ambos números. ¿Cuáles son estos números?	**4** Un pez pesa 10 kilogramos más la mitad de su peso. ¿Cuántos kilogramos pesa el pez?	**5** Halle el conjunto de cuatro enteros positivos consecutivos cuya suma de los cubos de los primeros tres es el cubo del cuarto?
8 Un estudio reciente destaca que el humano lee en promedio 2.3 palabras por cada segundo durante las 12 horas del día que recibe información. ¿Cuántas palabras al día son?	**9** La Vinotinto metió 3 goles en la arquería del equipo contrario y recibió 1 gol en su arquería. Ellos ganaron un juego, empataron uno y perdieron otro. ¿Cuál es el marcador del juego en el que ganó la Vinotinto?	**10** Si la razón entre dos números enteros es **3:2**, entonces la razón del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dichos números es:	**11** El producto de tres enteros es 24 y la suma de ellos es 9. ¿Cuál es el máximo valor posible para el entero más grande?	**12**  **Mychael Faraday** (1791–1867)
15 Un paralelepípedo rectangular con lados de medida 5, 6, y 8 cm se pinta de azul. Éste es dividió en cuatro paralelepípedo rectangulares iguales. ¿Cuál es la mínima área que no se encuentra pintada de azul?	**16** En un cuadrilátero convexo $ABCD$ con $AB = AC$ se sabe que $\angle BAD = 80°, \angle ABC = 75°$ y $\angle ADC = 65°$. ¿Cuál es la medida del ángulo BDC?	**17** La suma de once enteros consecutivos pares es p. El mayor de los números, en términos de p, se puede expresar como:	**18** José lanzó el dado 5 veces y todos sus resultados fueron diferentes. En cada lanzamiento, multiplicó el resultado por el número ordinal del lanzamiento. ¿Cuál es el resultado que no ocurrió si la suma de los cinco lanzamientos fue 70?	**19** Se tienen las siguientes notas: 12, 17, 13, 5, 10, 14, 9 y 16. ¿Cuáles dos notas se pueden eliminar sin modificar el promedio?
22 Un número tiene 2011 dígitos: el primer y último dígito es 1 y los restantes son 0. Al dividir el número entre 9, el resto que se obtiene es:	**23** En una calculadora defectuosa, en vez de multiplicar divide y resta en vez de sumar. En esa calculadora, ¿cuál es la respuesta de $(12 \times 3) + (4 \times 2)$?	**24** Las bisectrices del triángulo ABC se encuentran en el punto O. Dado que $\angle AOB = 100°$ y $\angle BOC = 110°$, halle las medida de los ángulos del triángulo ABC.	**25** La alarma del carro de Carlos tiene un código de cuatro dígitos: 1,2, 3 y 4. Carlos no se acuerda del orden correcto en que los dígitos deben ser colocados. ¿En cuántos órdenes ninguno de los dígitos se encuentra en el puesto correcto?	**26** Un profesor de matemáticas les dice a sus alumnos que él vive con cuatro quintos de sus perros más cuatro quintos de un perro. ¿Cuántos perros viven con el profesor?
29 Halle la suma de todos los enteros positivos x menores de 100 tales que $x^2 - 81$ sea un múltiplo de 100.	**30** El número 189 tiene la propiedad de que sus primeros dos dígitos sumados sean el tercero (1+8=9). ¿Cuántos números pares de tres dígitos cumplen con esta propiedad?	**31** Para producir una solución salina se agregaron 2 litros de solución salina al 30 % a tres litros de solución salina al 20 %. ¿Cuál es la concentración de sal que se obtuvo como resultado?		

Los Griegos y la Raíz Cuadrada de Dos

Hace unos dos mil quinientos años, Pitágoras se quedó perplejo cuando se topó con los números irracionales; se presume que fue con $\sqrt{2}$. Los griegos partían del sano principio de que todo segmento rectilíneo se podía "medir", es decir, podía asociársele un número que representase su longitud. Aplicando el teorema que lleva su nombre a un triángulo isorrectángulo, cuyos catetos iguales se toman como unidad de medida, Pitágoras se percató de que la hipotenusa ($\sqrt{2}$) no podía "medirse" con la unidad y sus partes alícuotas. ¿Qué especie de número correspondía pues a la longitud de la hipotenusa? A éste y a otros que no tardaron en aparecer se les llamó "irracionales", "inconmensurables"; nombres que sin duda reflejan el desconcierto que provocaron.



Los griegos no lograron dilucidar el misterio de los "irracionales", aunque en las obras de algunos de ellos en la época Alejandrina, tales como Arquímedes y Eudoxo, unos trescientos años después, se observa una profunda intuición acerca de su naturaleza –como aproximaciones sucesivas de fracciones– que es premonitoria de su "construcción" rigurosa a partir de los racionales. Hubo que esperar hasta 1872, cuando el matemático alemán Richard Dedekind, discípulo de Gauss, "construyó" rigurosamente el cuerpo de los números reales, por su método de las "cortaduras".

Los antiguos griegos empleaban un algoritmo muy sencillo para calcular $\sqrt{2}$, mediante aproximaciones por fracciones. Traducido a un lenguaje moderno, el algoritmo es como sigue. Se construyen las sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$ por el siguiente procedimiento recurrente:

n	x_n	y_n
0	1	1
1	2	3
2	5	7
3	12	17
4	29	41
5	70	99
……		………

Es decir, más brevemente, $x_0 = y_0 = 1$ y, para $n \geq 1$,

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \qquad y_n = x_n + x_{n-1} \tag{5}$$

Los griegos observaron que las fracciones $\frac{y_n}{x_n}$ proporcionan una aproximación cada vez mayor a $\sqrt{2}$, a medida que n se hace más grande. Como expresaríamos hoy día: $\lim(y_n/x_n) = \sqrt{2}$. No sabemos si los griegos tenían una justificación teórica para su procedimiento o si sólo se trataba de una apreciación empírica.

Vamos a examinar la cuestión con el auxilio de la matemática actual.

Se infiere de (5) que $y_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-2}$, de modo que, sustituyendo en la expresión para x_n, obtenemos:

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad \text{y, para } n \geq 1 : \ x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} \tag{6}$$

Es claro que la sucesión $\{x_n\}$ es de enteros positivos y estrictamente creciente. Sean $p = 1 + \sqrt{2}$ y $q = 1 - \sqrt{2}$. Por tanto,

$$p + q = 2 \qquad\qquad p\,q = -1$$

Luego, la expresión (6) es lo mismo que

$$x_{n+1} = (p + q)\,x_n - p\,q\,x_{n-1}$$

que da lugar a este par de expresiones

$$\begin{aligned} x_{n+1} - p\,x_n &= q\,(x_n - p\,x_{n-1}) \\ x_{n+1} - q\,x_n &= p\,(x_n - q\,x_{n-1}) \end{aligned}$$

O sea que las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{w_n\}$, definidas, para $n \geq 1$, como

$$u_{n+1} = x_{n+1} - p\,x_n \qquad w_{n+1} = x_{n+1} - q\,x_n$$

satisfacen la identidades

$$u_{n+1} = q\,u_n \qquad\qquad w_{n+1} = p\,w_n$$

que indican que se trata de progresiones geométricas, entonces

$$u_n = q^n \qquad\qquad w_n = p^n$$

ya que $u_1 = q$ y $w_1 = p$. Se infiere en consecuencia

$$\begin{aligned} w_{n+1} - u_{n+1} &= (x_{n+1} - q\,x_n) - (x_{n+1} - p\,x_n) = (p - q)\,x_n \\ \Longrightarrow \qquad (p - q)\,x_n &= w_{n+1} - u_{n+1} = p^{n+1} - q^{n+1} \\ \Longrightarrow \qquad x_n &= \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q} \end{aligned}$$

Obtenemos entonces (aplicando (5)),

$$\frac{y_n}{x_n} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{p^n - q^n}{p^{n+1} - q^{n+1}} = 1 + \frac{1 - r^n}{p - qr^n}$$

donde $r = q/p$, de modo que $-1 < r < 0$, o sea que $r^n \to 0$, es decir, r^n se acerca indefinidamente a 0 a medida que n crece. Se infiere que, para $n \to \infty$,

$$\lim \left(\frac{y_n}{x_n} \right) = 1 + \frac{1}{p} = \sqrt{2}$$

Empíricos o no, los griegos tenían razón.

Ignacio L. Iribarren
Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales
y la Universidad Simón Bolívar

OJM

NOVIEMBRE 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			1 Una tragavenados pesa 60 kilogramos. Al comerse un venado su peso cambia a 600 kilogramos. ¿Cuál es el porcentaje del incremento del peso de la tragavenado?	**2** Una piscina de forma cuadrada tiene lados de 4 metros de longitud. Se empieza a llenar y el nivel del agua sube a 0.5 m del fondo de la piscina. ¿Cuántos litros de agua ya se encuentran en la piscina?
5 	**6** Hay 2011 términos en una progresión aritmética. La suma del primer y último término es igual a 2. Halle la suma de todos los términos que ocupan posiciones pares en la progresión.	**7** El mínimo valor posible de la expresión $\lvert 11^n - 5^m \rvert$ donde n, m son enteros positivos es:	**8** Si $$a = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$$ ¿cuál es el valor de a^{2012}?	**9** La Tierra da una vuelta completa alrededor de su eje en 24 horas. ¿Cuántos grados gira entre las 11:00pm y las 7:00am?
12 Un rectángulo fue dividido en tres rectángulos más pequeños. Uno de ellos tiene medidas 7×11. Otro tiene medidas 4×8. Halle las dimensiones del tercer rectángulo para que éste tenga la máximo área posible.	**13** Sean a, b y c enteros positivos que cumplen con $$a^2 = 2b^3 = 3c^5.$$ ¿Cuál es el mínimo número de divisores de abc incluyendo 1 y abc?	**14** El pastelero Luis tiene 6 jarras llenas de 15, 16, 18, 19, 20 y 31 litros. Una contiene sirope de fresa y las otras tienen o leche o chocolate. Si Luis tiene el doble de leche que de chocolate, en que jarra está el sirope de fresa?	**15** Tres números de 2 dígitos tienen la propiedad de que la suma de dos cualesquiera de ellos es igual al número obtenido al intercambiar las posiciones de los dígitos del tercer número. La suma de los tres números originales es:	**16** Para confirmar que 2011 es un número primo, ¿cuánto es el mínimo número de enteros que se deben verificar que no son factores de 2011?
19 En el número $24X8Y$ se reemplazan la X y la Y por valores. Se tiene, entonces, un número de 5 dígitos divisible por 4, 5 y 9. ¿Cuál es la suma de $X+Y$?	**20** El promedio de altura de un grupo de cuatro niñas es 166cm. Cuando Rosa y Daniela ingresan al grupo, el promedio de alturas cae a 160cm. Si Rosa es 6cm más alta que Daniela, ¿cuál es la altura en centímetros de Rosa?	**21** ¿Cuántos de los siguientes números $$111, 1111, 111111, 11111111$$ son primos?	**22** ¿Cuántos pares de enteros positivos (x, y) satisfacen la ecuación $MCD(x, y) + MCD(x+1, y+1) = x - y$, donde $MCD(a, b)$ es el máximo común divisor entre a y b?	**23** Si $5^n + 7^n$ es divisible por $5^{n-1} + 7^{n-1}$, con n un entero positivo, el valor de n es:
26 Un número de 5 dígitos *abcde* es *número interesante* si todos sus dígitos son diferentes y $a = b + c + d + e$. ¿Cuántos números interesantes hay?	**27** Un mosaico rectangular tiene área 360cm^2 y está conformado por porcelanas cuadradas todas del mismo tamaño. El mosaico tiene 24 cm de altura y 5 porcelanas de ancho. ¿Cuál es el área de cada porcelana en cm^2?	**28** Los segmentos AB y AC son perpendiculares. La distancia desde el punto medio del segmento BC al segmento AB es menor que al segmento AC. ¿Cuál es el segmento más pequeño?	**29** Al sumar tres lados cualesquiera de un rectángulo se obtiene 20 o 22 como resultado. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?	**30** Luis inventó una nueva operación: $a \star b = a^b$. Si $$((5 \star 2) \star 6) \star 4 = ((5 \star 3) \star k) \star 2$$ entonces el valor de k es igual a:

¿El Uno es un Número Primo?

El conjunto de los números naturales es un conjunto fundamental en matemáticas. Gracias a la madurez que fue adquiriendo la matemática con el paso del tiempo, Euclides, un matemático griego, logró encontrar un conjunto que describía y representaba a cada uno de los números naturales, denominándolo el conjunto de los números primos. Logró demostrar en una prueba muy elegante mediante la reducción al absurdo, que existen infinitos números primos.

Consideremos la siguiente lista de números naturales:

$$1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$$

Este es un conjunto de 1000 números naturales consecutivos en donde ninguno de ellos es primo. Note que el primer elemento de la lista es divisible por 2, el segundo elemento es divisible por tres y asi sucesivamente hasta el último que es divisible por 1001. Claramente este resultado es posible generalizarlo mostrando, que a pesar de que hay infinitos números primos, existen espacios en los números naturales tan grandes como uno lo desee en donde no se encuentra ningún número primo.

El conjunto de números primos siempre se ha considerado importante en la matemática, pero en el año 1970, se despertó nuevamente un grán interés por su estudio con el surgimiento de la criptografía de clave pública.

Uno de los mayores cuestionamientos que se han hecho los matemáticos desde la antigüedad es determinar, si el número 1 debe o no considerarse como un número primo. A continuación enunciaremos algunas razones por las cuales el número 1 no debe ser primo.

Por definición

Consideremos la siguiente definición:

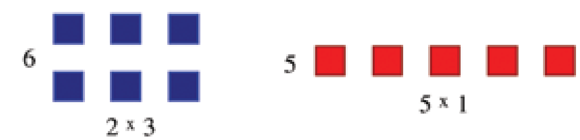
Definición: *Un número entero mayor que 1 se denomina un número primo si sólo tiene como divisores positivos a sí mismo y a la unidad.*

Notemos que una de las condiciones que se tiene que satisfacer, es que el número sea entero mayor que 1, con lo cuál automáticamente el 1 queda excluido del conjunto de los números primos. Aunque esta no es una razón de fondo para descartar el 1 del conjunto de números primos, a continuación observaremos algunas razones con un mayor fundamento matemático para decidir no incluir el 1 en los números primos.

Por su propósito

Como se hizo mención anteriormente, los números primos forman un conjunto que logr describir a cada uno de los enteros positivos. Uno de los teoremas que apoya matemáticamente esto es el **Teorema Fundamental de la Arimética**, el cuál establece que cualquier entero mayor que 1 puede escribirse como un producto de números primos y esta escritura es única salvo por el orden de los factores. Por ejemplo, el número 30 sólo puede expresarse como $2 \times 3 \times 5$ según esa definición, y 29, que es un número primo, sólo como 29. Ahora bien si cosideraramos que el 1 fuera primo, se podrían construir ejemplos que invalidarían este teorema. Es decir, consideremos nuevamente el número 30, entonces, $30 = 1 \times 2 \times 3 \times 5$ pero también lo podriamos expresar como $30 = 1^2 \times 2 \times 3 \times 5$ y así sucesivamente, razón por la cual violariamos la unicidad de la escritura.

Una forma simple de representar los números es usando cubitos, por ejemplo el número 6, lo podemos representar mediate un rectángulo de 2 cubitos por 3 cubitos o viceversa. Mientras que si intentamos representar el número 5, la única forma de obtener un rectángulo es formándolo con 5 cubitos por 1 cubito. Así, empiricamente se podría concluir que la única forma para representar números primos de esta manera es siempre ubicándolos en una sola fila.



Porque 1 es una unidad

Esto tiene que ver con un tipo de números llamados las unidades o elementos invertibles. Primero definiremos a que se le conoce como unidad. En un conjunto de números, llamaremos unidad a aquel elemento que posee un inverso multiplicativo. Por ejemplo si se está trabajando en los números enteros, las únicas unidades que existen en este conjunto son el 1 y el -1, aunque en algunos otros conjuntos exiten infinitas unidades. Este concepto es vital en la razón que explicaremos a continuación.

Por la definición generalizada de primo.

En las matemáticas modernas, se define como anillo a un conjunto dotado con dos operaciones binarias que satisfacen ciertas propiedades. En este conjunto se definen y demuestran propiedades matemáticas que generalizan las características de los conjuntos usuales de números. Estas propiedades son en esencia el pilar sobre el cual se fundamentan operaciones tan basicas como la suma y la multiplicación, entre otras. Un ejemplo sencillo de lo que es un anillo son los números enteros con la suma y la multiplicación.

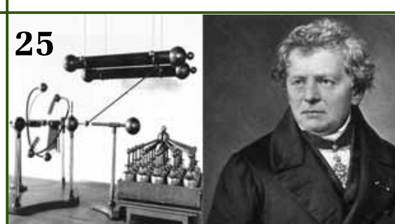
Definición: *En ciertas clases de anillos, un elemento distinto de cero que no es unidad se llama primo, si siempre que él sea un divisor del producto de dos elementos del anillo, entonces él es divisor de alguno de ellos.*

Esta definición es la generalización de la definición usual de número primo y abre la posibilidad de estudiar la validez del teorema fundamental de la aritmética en anillos diferentes del de los enteros. Como el 1 es unidad en el conjunto de los enteros, entonces es natural descartarlo del conjunto de los números primos.

Luís Fernando Cáceres Duque
César A. Barreto González
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico-RUM - Puerto Rico

OJM

DICIEMBRE 2012

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 Si $f(x+y) = f(xy)$ y $f(10) = 5$, entonces $f(40)$ es:	**4** Si $8^n + 8^n + 8^n + 8^n = 2^{2012}$, entonces $n =$	**5** Los cinco signos representan cinco dígitos diferentes. $\heartsuit + \heartsuit + \heartsuit = \star$ $\clubsuit + \clubsuit + \clubsuit = \S$ $\star + \S = \diamondsuit$ $\diamondsuit = ?$	**6** Juan piensa en tres números diferentes. Cuando los agrupa alternativamente en pares obtiene como suma 13, 15 y 18. ¿Cuáles son los números que Juan pensó?	**7** Una cancha rectangular tiene un perímetro de $20a + 8$ y la medida de un par de lados paralelos es $10a + 4$. ¿Cuál es la medida de cada uno de los otros dos lados?
10 Halle el entero más grande con nueve dígitos diferentes tales que la suma de cada par de dígitos vecinos sea un número primo.	**11** Dos números positivos p y q satisfacen la ecuación $$p^2 - 2p + q^2 - 2q = 15 - 2pq.$$ Halle el valor de $p + q$.	**12** Si $2^{9^a} = 8^{3^b}$, que relación se puede obtener entre a y b?	**13** ¿Cuál es la suma de los divisores primos de 1591?	**14** ¿Cuál es el mínimo valor del número entero x que cumple con la propiedad $$\|\|2x - 1\| + 2\| = 7?$$
17 X es un punto en la diagonal BD del cuadrilátero $ABCD$. Se sabe que $AB = BC$, $BX = XC, \angle BAD = \angle BXA$ y que $\angle CXD = 80°$. ¿Cuál es la medida del ángulo BDC?	**18** Linda compró unos libros en navidad. Los libros eran de los géneros de detectives, de viaje y de ciencia ficción. 3 de ellos no eran de detectives, 4 no eran de viaje y 5 no eran de ciencia ficción. ¿Cuántos libros compró Linda?	**19** El producto de dos primos relativos es 37800. ¿Cuántas soluciones diferentes existen para estos dos números?	**20** ¿Cuántos pares de enteros positivos (x, y) cumplen con la propiedad $x^2 - y^2 = 105$?	**21** Si de cualquier entero positivo se resta la suma de sus dígitos, el número resultante siempre es divisible por:
14 Se tienen baldosas cuadradas de lados 10cm, 20cm y 30cm de largo. ¿Cuál es el área del cuadrado, en centímetros cuadrados, más grande que se puede embaldosar con exactamente 8 de esas baldosas?	**25**  **Georg Ohm** (1789–1854)	**26** ¿Cuál es el máximo divisor primo de la expresión $3\cdot(3\cdot(3\cdot(3\cdot(3\cdot(3\cdot(3+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1$?	**27** A, B, C, D y E son puntos en el espacio. $AB = AC = AD = AE = BC = BD = BE = 2$. Si $CD = DE = EC$, ¿cuál es la medida común de estos segmentos?	**28** ¿Qué número ocupa el puesto 2012 en la secuencia de números $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5 \ldots$?
31 Considere dos sucesiones aritméticas $5, 20, 35 \ldots$ y $35, 61, 87, \ldots$ ¿Cuántas sucesiones aritméticas formadas únicamente con enteros positivos existen tales que contengan a ambas sucesiones dadas?				

Soluciones Enero - Junio

Enero

2	3.
3	2021.
4	48.
5	6.
6	3.
10	3.
11	44.
12	4.
13	31/12/2000.
16	5.
17	12.
18	9.
19	3 unidades.
20	200.
23	8.
24	2011.
25	2012.
26	156.
27	360.
30	6.
31	2 horas.

Febrero

1	30.
2	4.
3	Martes.
6	80.
7	120.
8	Bs. 30.
9	3.
10	6.
13	2.
14	11.
15	10.
16	9.
17	24.
22	7.
23	9.
24	100.
27	60.
28	50.
29	327.

Marzo

1	4.
2	18.
5	21 y 45; 27 y 35.
6	75.
7	91.
8	1000.
9	3.
12	4.
13	7.
14	25.
16	1.
20	22.
21	11.
22	N.
23	40.
26	15.
27	126.
28	4.
29	101.
30	14.

Abril

9	Domingo.
10	16.
11	45.
12	10.
13	9.
16	pera, durazno, uvas, cambur.
17	4.
18	9.
20	13.
23	3 min.
24	3.
25	6.
26	30.
27	13.
30	211.

Mayo

2	907.
3	6.
4	36.
7	0,10 Bs.
8	6.
9	6.
10	55.
11	12.
14	9.
15	72.
16	70.
17	12.
18	7.
22	12.
23	2700.
24	66.
25	2.
28	17.
29	2.
30	11.
31	8.

Junio

1	Jueves.
4	15.
5	8802.
6	48, 29, 23.
7	50 min.
8	7,5.
12	2.
13	3 h 19 min.
14	48 Bs.
18	85.
19	10.
20	No.
21	Duodécimo.
22	280.
25	8.
26	901.
27	907.
28	48.
29	19.

OJM

Soluciones Julio - Diciembre

Julio

3	28.
6	5.
9	24.
10	1.
11	5.
12	6.
13	2021.
16	4.
17	38.
18	34.
19	11.
20	111.
23	3.
25	6.
26	1.
27	0.
30	Domingo.
31	3.

Agosto

1	604800.
2	151200.
3	512.
6	120.
7	28.
8	64864800.
9	20.
10	60.
14	3024.
15	35.
16	2300.
17	15.
20	6720.
21	167960.
22	24!
23	2401.
24	720.
27	241920.
28	30.
29	17280.
30	600.
31	420.

Septiembre

3	810000000.
4	36.
5	11.
6	13 y 14.
7	20.
10	70.
11	7.
12	4.
13	6.
14	$a+b$.
17	$3/4$.
18	1.
19	5.
20	Triángulo acutángulo.
21	64.
24	21.
25	14.
26	Son iguales.
27	8.
28	2^9.

Octubre

1	8.
2	1.
3	4 y 5.
4	20.
5	3, 4, 5 y 6.
8	99360.
9	3:0.
10	6.
11	12.
15	140.
16	15.
17	$\frac{p}{11}+10$.
18	1.
19	14 y 10.
22	2.
23	2.
24	20, 40 y 120.
25	9.
26	4.
29	200.
30	20.
31	24 %.

Noviembre

1	900 %.
2	8000.
6	1005.
7	4.
8	1.
9	120°.
12	7×8.
13	77.
14	20.
15	99.
16	14.
19	4.
20	151.
21	0.
22	0.
23	1.
26	168.
27	9.
28	AC.
29	28.
30	8.

Diciembre

3	5.
4	670.
5	9.
6	10, 8, 5.
7	$5a+2$.
10	985674321.
11	5.
12	$2a=b+1$.
13	80.
14	-2.
17	40°.
18	6.
19	8.
20	4.
21	9, 3 y 1.
24	2500.
26	41.
27	3.
28	63.
31	5.

Una actividad de:

Asociación Venezolana
de Competencias Matemáticas

UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331. Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 0212 605.1512

E-mail: asomatemat8@gmail.com

www.acm.ciens.ucv.ve

FUNDECOM
Fundación para el Desarrollo de Competencias Matemáticas

Olimpiada Recreativa de Matematica

http://olimpiadarecreativa.com

fundación EMPRESAS POLAR
RIF: J-00110574-3

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Depósito Legal CC259201135

Coordinación General
Rafael Sánchez Lamoneda

Coordinación Nacional ORM
Jorge Salazar

Recopilación y soluciones
Laura Vielma Herrero

Revisión académica
José Heber Nieto
Saturnino Fermín

Edición y diseño
Laura Vielma Herrero

Colaboraciones
José Alberto Infante
Walter Beyer
Tomás Guardia
Óscar Bernal
Sofía Taylor
Fabiola Czwienczek
Luis Núñez
Andreína Núñez
Andrea Chávez
José Martínez
Ana Vásquez
Ignacio Iribarren
Luis Cáceres

Diseño de portada
y montaje digital
Rogelio *Paco* Chovet

Producción editorial
Gustavo Suárez