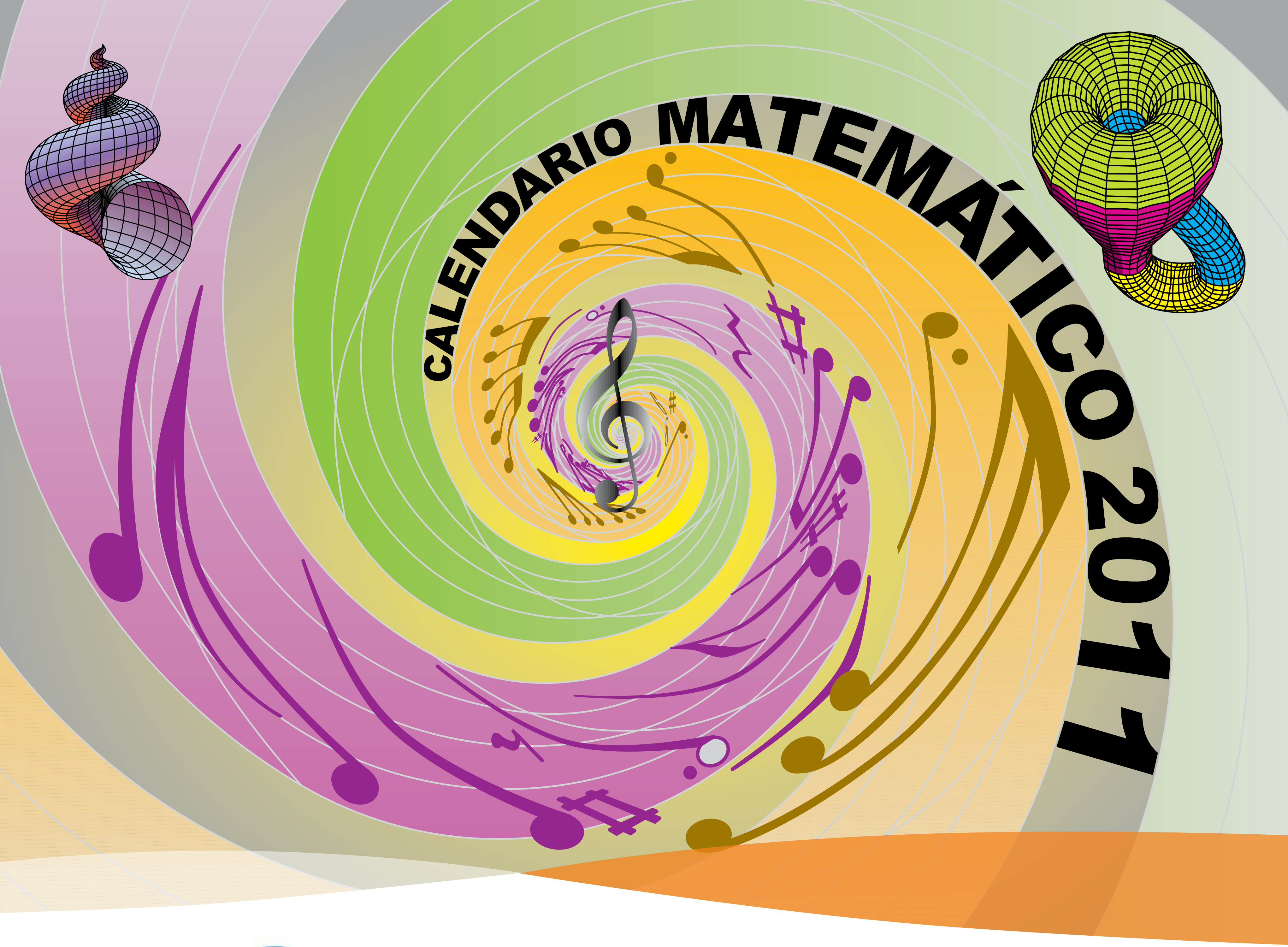
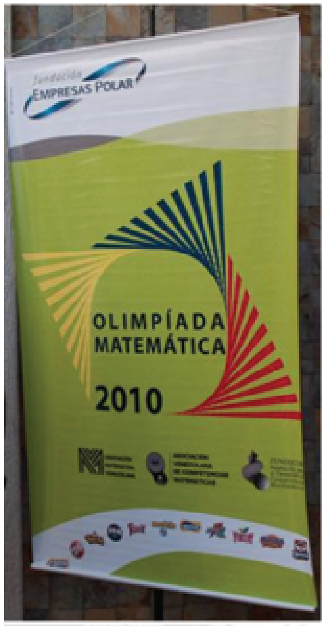
CALENDARIO MATEMÁTICO 2011



fundación EMPRESAS POLAR

Presentación del Calendario Matemático 2011



El presente es el cuarto Calendario Matemático que elaboramos con motivo del Programa de Olimpiadas Matemáticas, que llevan adelante la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la Fundación Para el Desarrollo de Competencias. El mismo tiene como objetivo facilitar a docentes y alumnos, un grupo de problemas de matemáticas recreativas, junto con una serie de pequeños artículos de divulgación de temas matemáticos o sugerencias de trabajo en el aula. Para esto último contamos con la colaboración de un grupo de colegas de varias instituciones nacionales e internacionales, quienes gustosamente nos ofrecen su apoyo desinteresado año tras año para enriquecer el Calendario Matemático.

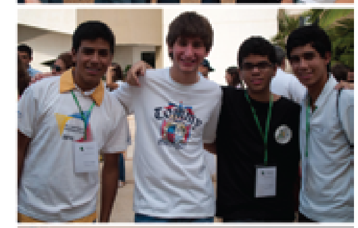
El Calendario está estructurado de tal manera que proponemos un problema por día salvo los fines de semana y días festivos. La intención del mismo es que sirva de trabajo diario durante la semana, tanto para docentes como alumnos, para el desarrollo de las habilidades del pensamiento matemático y de problemas tipo olimpiadas. Al final del mismo, encontrarán las soluciones de los problemas de cada día. Además intercalamos entre los problemas, fotos, dibujos e información que indican un tema escogido para cada Calendario. Este año será la *Matemática en la Música* nuestra guía.

Unas palabras sobre los problemas. Hemos tenido el cuidado de presentarlos en orden creciente de dificultad, aunque eso siempre tendrá sus detractores, pues lo que resulta fácil para algunas personas, puede ser difícil para otras. Los seis primeros meses son dedicados a problemas de la Olimpiada Recreativa de Matemáticas. El lector podrá ver en las esquinas superiores de la página el símbolo ORM, para indicar esta competencia. En el segundo semestre del año cada página se identifica con las siglas OJM, para indicar que los problemas corresponden a la Olimpiada Juvenil de Matemáticas. Los artículos que acompañan cada mes se encuentran ubicados de la misma forma dentro del Calendario.

Los problemas que se encuentran en este Calendario provienen de varias fuentes. Algunos son problemas originales del equipo de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la Fundación Para el Desarrollo de Competencias y otros son problemas modificados de otras organizaciones de olimpiadas alrededor del mundo y de la organización *Canguro Sin Fronteras* realizadas por el recopilador del Calendario.

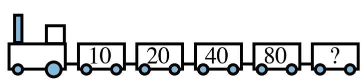
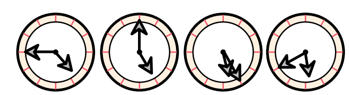
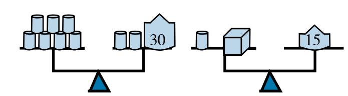
Para mayor información sobre las Olimpiadas Matemáticas puede visitar nuestro sitio de internet, www.acm.org.ve.

Rafael Sánchez Lamoneda
Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
Universidad Central de Venezuela



ORM

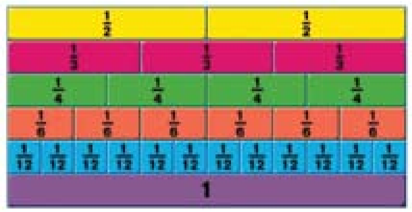
ENERO 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 $2007 + 2008 + 2009 + 2010 + 2011 =$	**4** La maestra de María le lleva 23 años. María tiene 9 años. La edad de la maestra de María es:	**5** (2007 + 2009 + 2011) - (2011 + 2009 + 2007) es igual a:	**6** En un cable de tendido eléctrico están paradas unas palomas. En un momento, 5 de ellas vuelan y luego regresan 3. Contamos doce palomas en ese instante. ¿Cuántas palomas había al comienzo?	**7** Si la hora correcta es 12:15 p.m. y el reloj se paró hace dos horas y media, ¿a qué hora se paró el reloj?
10 La abuela de Ana recoge de su patio 19 frutas entre mangos y naranjas. El número de mangos supera al de naranjas en 3. ¿Cuántas naranjas recogió la abuela de María?	**11** José tiene 11 hojas de papel de carta. Él corta algunas de las hojas en tres partes cada una. Ahora tiene 29 piezas de papel en total. ¿Cuántas hojas de papel cortó?	**12** Se tiene un cuadrado grande cuyo lado mide 6 cm y un cuadrado pequeño cuyo lado mide 2 cm. ¿Cuántos cuadrados pequeños se necesitan para llenar el cuadrado grande?	**13** Ana compró cuatro quintos de un metro de tela para su proyecto, pero sólo utilizó tres cuartos del material. ¿Cuánto material utilizó en su proyecto?	**14** Todos los paquetes de caramelos tienen la misma cantidad. Ana y su amiga se comen 3 paquetes completos y 4 caramelos de otro paquete. Se comen en total 25 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene cada paquete?
17 Todos los estudiantes del salón de clases de Pedro y Ana se colocaron en una sola fila. Ana tenía 16 estudiantes detrás de ella, uno de ellos era Pedro. Pedro tenía 14 estudiantes delante de él, uno de ellos era Ana. Entre Pedro y Ana había 7 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes había en total en el salón de clases de Pedro y Ana?	**18** ¿Cuál número corresponde al último vagón? 	**19** Hay 18 bolas en una bolsa. Algunas son azules, otras son verdes y otras rojas. Hay dos bolas verdes más que azules y hay doble de bolas rojas que azules. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?	**20** Observa los cuatro relojes:  Uno de ellos tiene la hora correcta. Otro está adelantado veinte minutos. Otro está atrasado veinte minutos. Otro está parado. ¿Cuál es la hora exacta?	**21** ¿Cuánto pesa el cubo? 
24 Los tres miembros de una familia de conejos se comen en total 73 zanahorias. Papá conejo se come 5 zanahorias más que mamá conejo y el hijo se come 12 zanahorias. ¿Cuántas zanahorias se comió mamá conejo?	**25** Las nueve paradas de autobus de la Línea A se encuentran separadas a igual distancia una de la otra. La distancia de la primera a la tercera es 600 m. ¿Qué distancia hay de la primera a la última?	**26** De un número cuya mitad es igual a 9 restamos un número cuyos dos tercios es igual a 10. El resultado de esta sustracción es:	**27** ¿Cuánto es el valor de $\frac{2011+2011+2011+2011+2011+2011}{2011+2011}$?	**28** Si dibujas 4 circunferencias en una hoja de papel, ¿cuál es el mayor número de puntos de intersección de las circunferencias?
31 Cinco tortas de chocolate cuestan igual a dos tortas de zanahoria. Una torta de zanahoria cuesta igual a tres pasteles. ¿Cuántas pasteles tienen el mismo costo que diez tortas de chocolate?				

¿Cómo construir fracciones a partir de otras fracciones?

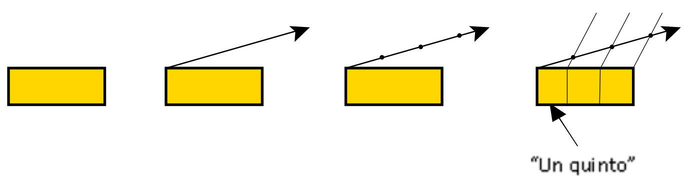
Recordemos que al dividir un todo, concebido como una unidad, en un número de partes de igual tamaño o partes iguales, que se denominan **partes fraccionarias**, estas nuevas sirven como una nueva *unidad* para contar.

Así, se puede contar *medios*, cuando el todo es dividido en 2 partes iguales, *cuartos*, cuando es dividido en 4 partes iguales, *séptimos*, cuando es dividido en 7 partes iguales, y así sucesivamente. También se puede contar: *cinco cuartos* (como cuando compramos cinco cuartos de leche), o *cuatro medios* (como cuando compramos cuatro medios litros de chicha). Es común construir fracciones a partir de una unidad o todo. Veamos, mediante ejemplos, cómo construir fracciones a partir de fracciones dadas. Utilizaremos fracciones dadas en alguno de los modelos de representación: región, lineal y discreto.

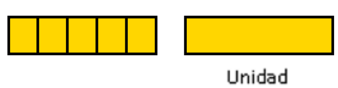


EJEMPLO Nº 1: Supongamos que esta barra  representa la fracción *tres quintos*. A partir de ella debemos construir la fracción *tres medios*.

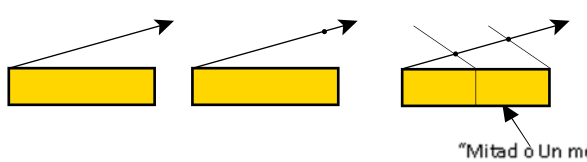
Solución: Una posible solución es dividir la barra que representa *tres quintos* en tres partes iguales y así cada parte es *un quinto* del todo:



Repetimos *un quinto* cinco veces y obtenemos la unidad o todo:

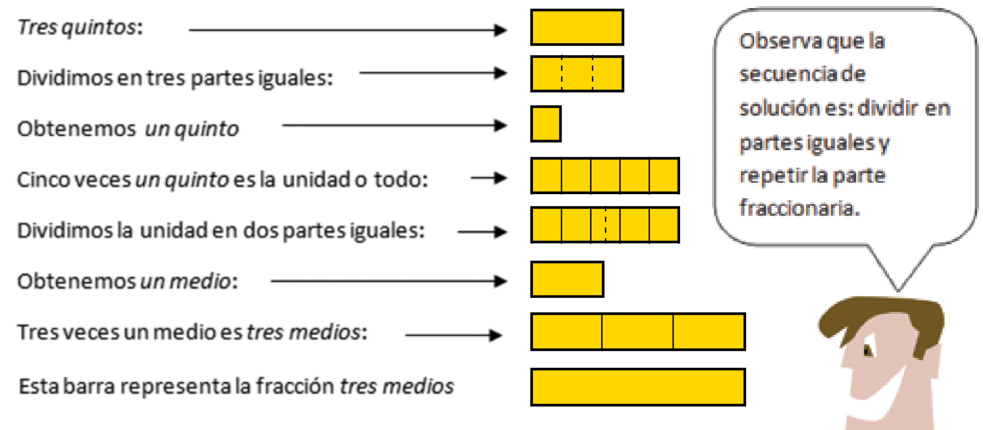


Luego dividimos la unidad obtenida en medios o mitades:

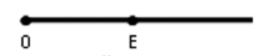


Repetimos *un medio* tres veces y obtenemos *tres medios*: 

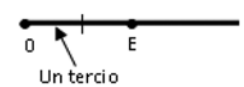
En forma secuencial:



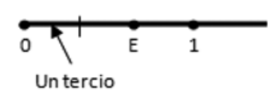
EJEMPLO Nº 2: Supongamos que el punto E en la recta representa la fracción *dos tercios*. Determina el punto que representa la fracción *tres cuartos*.



Solución: Una posible solución es dividir el segmento que representa *dos tercios* en dos partes iguales y así cada parte es *un tercio* del todo:



Luego, repetimos *un tercio* tres veces y obtenemos el punto que representa la unidad:



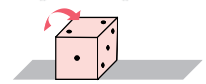
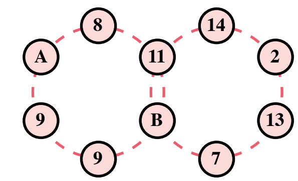
Dividimos la unidad en cuatro partes iguales y tomamos tres de ellas:

El punto F representa la fracción *tres cuartos*.

Jorge Salazar
Universidad Pedagógica Experimental Libertador

ORM

FEBRERO 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 Una moneda es lanzada 3 veces. ¿Cuántas secuencias diferentes de cara y sello se pueden obtener?	**2** En un dado normal, la suma de los puntos en las caras opuestas es 7. Este dado se va volteando sobre sus caras a lo largo de la franja gris. Si lo volteamos 2011 veces, ¿cuál cara del dado queda en su parte superior? 	**3** Papá canguro compró de los tres tipos de chocolates que había en la tienda: grande, mediano y pequeño. Un chocolate grande cuesta 4 bolívares, uno mediano 2 bolívares y uno pequeño 1 bolívar. Papá canguro compró 10 chocolates y pagó 16 bolívares. ¿Cuántos chocolates grandes compró?	**4** En cada uno de los siguientes anillos, la suma de los dígitos es cincuenta y cinco. ¿Qué número es A? 
7 Tienes seis barras de longitudes 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2009 cm, 2010 cm y 2011 cm. ¿Cuántos triángulos diferentes puedes construir con esas barras?	**8** María tiene 9 billetes de Bs. 100, 9 billetes de Bs. 10 y 10 monedas de Bs. 1. ¿Cuántos bolívares tiene María?	**9** Luís tiene 12 años. María es 3 años más joven y Carlos tiene 4 años más que María. ¿Cuántos años tiene Carlos?	**10** El pequeño Miguel tiene tres y medio años. Su hermanita tiene un cuarto de año de edad. ¿Cuántos meses le lleva Miguel a su hermanita?	**11** Considera todos los números naturales de dos dígitos tales que la suma de sus dígitos sea 11. Si a cada uno de esos números le sumas 2, ¿cuántos de ellos son divisibles entre 4?
14 A Beatriz le gusta calcular la suma de los dígitos que ella ve en su reloj digital (por ejemplo, si el reloj muestra 13:17, entonces Beatriz obtiene 12). ¿Cuál es la mayor suma que ella puede obtener?	**15** Si caminas 2 kilómetros hacia el norte, 3 kilómetros hacia el este, 4 kilómetros hacia el sur, 5 kilómetros hacia el oeste y 2 kilómetros hacia el norte, ¿a cuántos kilómetros estás del punto de partida?	**16** Un envase con leche hasta la mitad pesa 22 kg. El mismo envase con leche sólo hasta un tercio, pesa 16 kg. ¿Qué porcentaje del peso total del envase lleno de leche es el peso del envase sólo?	**17** José recoge 2010 mangos e intenta arreglarlos en grupos de cinco. ¿Cuántos grupos de cinco mangos pudo formar?	**18** Pedro cumplió 12 años. Cada año sus padres le han venido cortando una torta y él ha apagado las velas de sus cumpleaños. ¿Cuántas velas ha apagado Pedro de todos sus cumpleaños?
21 Dos familias formadas por mamá, papá y los hijos van a un teatro. Los Pérez tienen dos hijos y los Plaza tienen tres hijos. La entrada de una persona adulta es Bs. 30. Los Pérez pagaron Bs. 84. ¿Cuánto pagaron los Plaza?	**22** José realiza una carrera de bicicleta de tres días. El primer día recorrió 40 kilómetros que es un medio de lo que recorrió el segundo día y un tercio de lo que recorrió el tercer día. ¿Cuántos kilómetros recorrió José en los tres días de carrera?	**23** El día lunes, Sofía recibió de regalo un libro de 180 páginas por su cumpleaños. Ese día leyó 12 páginas del libro y en cada siguiente día leyó el doble de páginas del día anterior. ¿En cuál día de la semana, Sofía terminó de leer el libro?	**24** Hoy es sábado, ¿qué día de la semana será cuando hayan trascurrido 2011 días?	**25** En un salón de clases, el número de hembras supera al de varones en 8. Al mismo tiempo, el número de varones es dos veces menos que el número de hembras. ¿Cuántos alumnos hay en el salón de clases?
28 La mitad de las mujeres de un club están sobre los 60 años y la mitad del resto están por debajo de 40 años. ¿Qué tanto por ciento de las mujeres del club están entre 40 y 60 años?				

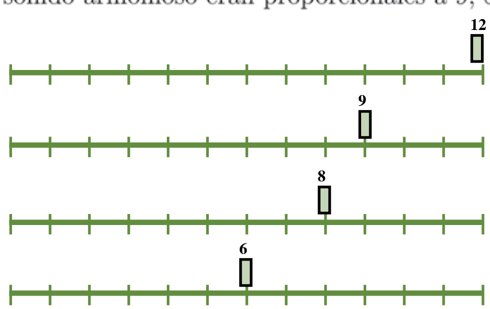
Matemática y Música

Para Pitágoras y sus seguidores los números eran el principio de todas las cosas, y musicalmente, éstos marcan los ritmos, los tonos, la armonía y las pautas. Es así como la Matemática habita en la música de una manera silenciosa.

Cuando dos o más notas suenan simultáneamente se produce un acorde, cuyo sonido puede ser agradable o menos agradable al oído, evidentemente esta es una apreciación subjetiva, pero la mayoría de las personas, independientemente de su formación musical pueden separar estos sonidos.

Una manera de producir un sonido es hacer vibrar una cuerda. La nota que se emite depende de la longitud de ésta y podemos asociar las longitudes con números. Basado en este hecho Pitágoras, quien en ese momento está muy influenciado por sus conocimientos sobre las medias (aritmética, geométrica y armónica) y el misticismo de los números naturales, en especial los cuatro primeros, decide estudiar la relación entre las longitudes de las cuerdas y los sonidos armoniosos. Con la ayuda del monocordio, una cuerda tensada sobre una tabla a la cual podía cambiar la longitud mediante un puente móvil (este proceso es análogo al que se hace al pulsar cualquier instrumento de cuerda: violín, bajo, guitarra), había realizado algunos experimentos con cuerdas cuyas longitudes tenían razones 1:2 (longitudes 1:2 y 1), 2:3 (media armónica de 1:2 y 1) y 3:4 (media aritmética de 1:2 y 1).

Dividió la cuerda en doce partes y comenzó a mover el Puente, hasta encontrar los intervalos en los cuales obtenía un sonido agradable. Descubrió que las longitudes en las cuales conseguía sonido armonioso eran proporcionales a 9, 8 y 6.



Le dio el nombre de **tono** a la nota producida por la longitud total de la cuerda y a las otras tres **diapasón**, **diapente** y **diatesarón** que actualmente los llamamos octava, quinta y cuarta, respectivamente, y con ellos, Pitágoras construyó la primera escala musical (diatónica) de la historia.

La multiplicación de 1, 3/4, 2/3 y 1/2 por 12

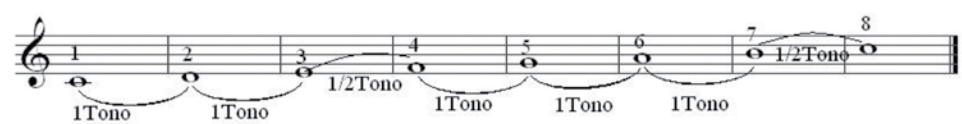
$$\begin{aligned} 1 \times 12 &= 12 \\ \frac{3}{4} \times 12 &= 9 \\ \frac{2}{3} \times 12 &= 8 \\ \frac{1}{2} \times 12 &= 6 \end{aligned}$$

nos proporcionan las correspondientes razones de la longitud de la cuerda:

$$\begin{aligned} 1 &= \text{ tono} \\ \frac{3}{4} &= \text{ cuarta} \\ \frac{2}{3} &= \text{ quinta} \\ \frac{1}{2} &= \text{ octava} \end{aligned}$$

Octava, quinta y cuarta corresponden a las notas de la escala pitagórica diatónica (do, re mi, **fa**, **sol**, la, si, **do**).

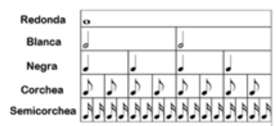
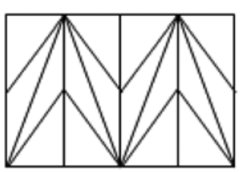
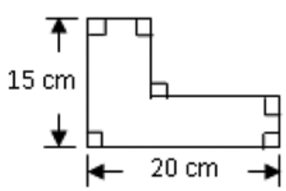
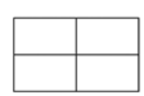
De esa manera Pitágoras estableció el lazo de unión que había entre la belleza de la música y los números.



Luis Echarry Escobar
Departamento de Matemáticas y Física
Instituto Pedagógico de Caracas
Universidad Pedagógica Experimental Libertador

ORM

MARZO 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 La suma de los dígitos de un número de diez dígitos es 9. ¿Cuál es el producto de los dígitos de este número?	**2** Algunos números de tres dígitos cuando se multiplican por 4 dan un número de 4 dígitos. ¿Cuántos números de tres dígitos hay con esa condición?	**3** El jardinero extendió el lado corto del jardín rectangular en 3 metros y ahora tiene un jardín de forma cuadrada con 36 m^2 más que el jardín original. ¿Cuál era el área del jardín original?	**4** En una frutería venden 3 lechosas y 8 mangos en Bs. 43,90 o 5 lechosas y 10 mangos en Bs. 60,50. María compró 7 lechosas y 7 mangos. ¿Cuánto pagó?
7 *En la música, los compases se indican por medio de dos cifras, que se representan en forma de* ***fracción****, y que se colocan al principio del pentagrama, tras la clave y la armadura* 	**8** *El numerador representa el número de tiempos que tendrá el compás y el denominador la unidad de tiempo.* 	**9** Pedro pesca 46 peces entre carites, bonitas y roncadores. 28 de ellos eran carites y bonitas y había 3 bonitas menos que roncadores. ¿Cuántos carites pescó?	**10** Un cubo de dimensiones $5 \times 5 \times 5$ se introduce en un envase con pintura negra. Al secarse se descompone en cubos unitarios (cubos de dimensión $1 \times 1 \times 1$). ¿Cuántos cubos unitarios tienen una sola cara negra?	**11** La señora Petra gastó Bs. 360 en la compra de ropa y zapatos. Gastó una cuarta parte en zapatos. Con el resto compró una camisa de Bs. 60, un pantalón de Bs. 90 y una chaqueta. ¿Cuánto gastó en la chaqueta?
14 ¿Cuántos triángulos hay en la figura? 	**15** Juan lee todas las páginas de un libro desde la página 20 a la página 40. ¿Cuántas páginas leyó?	**16** Las manzanas sólo se venden en paquetes de 4. ¿Cuál es el menor número de paquetes que debo comprar para tener 26 manzanas?	**17** *Canguro Matemático*	**18** De los primeros 25 números enteros positivos se eliminan 5 números pares. ¿Qué tanto por ciento de los números restantes son números pares?
21 ¿Cuál es el perímetro de la figura? 	**22** Si el patrón de formación de la secuencia de las primeras 5 letras continúa: ABCDEABCDEABCDE... ¿Cuál letra ocupa el lugar 2011 en la secuencia?	**23** ¿Cuál es la diferencia entre la medida de un ángulo de un cuadrado y la medida de un ángulo de un triángulo equilátero?	**24** El promedio de dos números es 8 y su producto es 55. ¿Cuál es el número mayor?	**25** ¿Cuál es la suma de todos los números enteros positivos menores de 28, que son factores de 28?
28 2000 abejas tardan 1 año en hacer 7 jarras de miel. En iguales condiciones, ¿qué tiempo tardarán 5000 abejas en hacer 70 jarras de miel?	**29** Estoy pensando en dos números, uno de tres dígitos y otro de dos dígitos. La diferencia de ellos es 1. ¿Cuál es la suma de los números?	**30** ¿Cuántos rectángulos diferentes hay en la figura? 	**31** Se forma una figura con un cuadrado y un triángulo equilátero que tiene sólo un lado en común con el cuadrado. Si el perímetro del triángulo es 15 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura?	

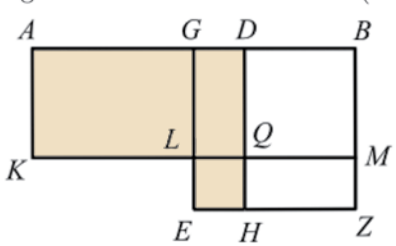
De cómo se cuela el Álgebra en la Geometría

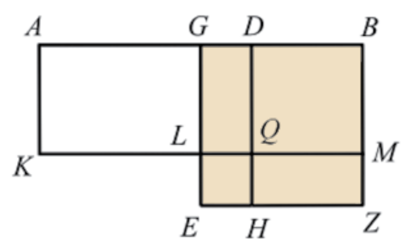
Es mucho lo que le debemos a la matemática griega clásica, al punto de que hoy intentamos copiar su modelo de razonamiento para hacer nuestra propia matemática. No obstante, todo este gran desarrollo fue realizado a partir de una carencia: *el álgebra*; nunca pudieron los griegos crear un sistema sólido de símbolos para denotar a los objetos matemáticos y operar con tales símbolos como si fueran los propios objetos.

Sin embargo, el álgebra se cuela por los rincones y el pensamiento moderno ha reducido a álgebra buena cantidad de los resultados clásicos. De hecho, uno de los libros de los *Elementos* de Euclides –el segundo, para ser más preciso– ha recibido el nombre de *álgebra geométrica*, pues todas sus proposiciones pueden interpretarse en términos de identidades o ecuaciones de segundo grado. Pero para Euclides lo único que había era geometría. Veamos un ejemplo particularmente interesante en el tratamiento que este geómetra le dio a un teorema equivalente a la fórmula

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

En los *Elementos* el teorema aparece así:
Si se corta una línea recta (AB) en segmentos iguales (AG y GB) y desiguales (AD y DB), el rectángulo ($ADQK$) comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado ($LQHE$) de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad ($GBZE$).





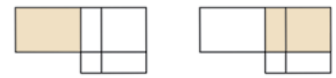
Para tratar de hacerte más fácil la lectura incluí dos copias del dibujo usado por el propio Euclides, en las que hacemos las siguientes identificaciones

$$AD = a, \quad DB = AK = b, \quad AG = GB = \frac{a+b}{2}, \quad GD = LQ = \frac{a-b}{2},$$

que nos comprueban la coincidencia del teorema con la fórmula de arriba, pues hay que demostrar la igualdad de áreas de las figuras sombreadas en ambos dibujos. Otra cosa que debes saber es que cuando los griegos decían *recta* estaban pensando en lo que nosotros llamamos *segmento*.

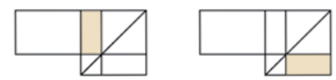
Tú puedes hacer la demostración usando tus conocimientos de productos notables, pero es bueno que veas la demostración absolutamente geométrica que hizo el propio Euclides, y que se puede esquematizar en los siguientes cuatro pasos.

Primer paso



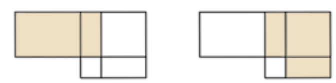
Los rectángulos sombreados son iguales, pues uno de sus lados es la mitad de la recta y el otro una recta igual al "segmento desigual".

Segundo paso



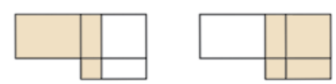
Euclides ya había demostrado la igualdad de los rectángulos que vemos en esta figura. Observa cómo están situados respecto a la diagonal señalada e intenta mostrar tú mismo la igualdad. Se llamaron *complementos* del rectángulo $GBZE$ respecto a la diagonal BE.

Tercer paso



A la figura del lado izquierdo del primer paso se le añade el complemento vertical, mientras que a la de la derecha se le añade el complemento horizontal. El resultado es la igualdad (en área) de las figuras sombreadas.

Cuarto paso



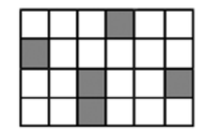
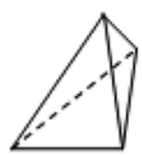
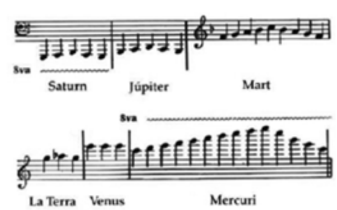
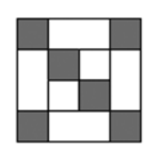
Solo queda añadir a ambas figuras el cuadrado pequeño para obtener finalmente el resultado que buscábamos.

La fórmula comentada se usó para conseguir *ternas pitagóricas*, esto es triángulos rectángulos cuyos lados tuvieran longitudes enteras o, en términos estrictamente algebraicos, soluciones enteras de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Te invito a usarla para identificar algunas de tales ternas.

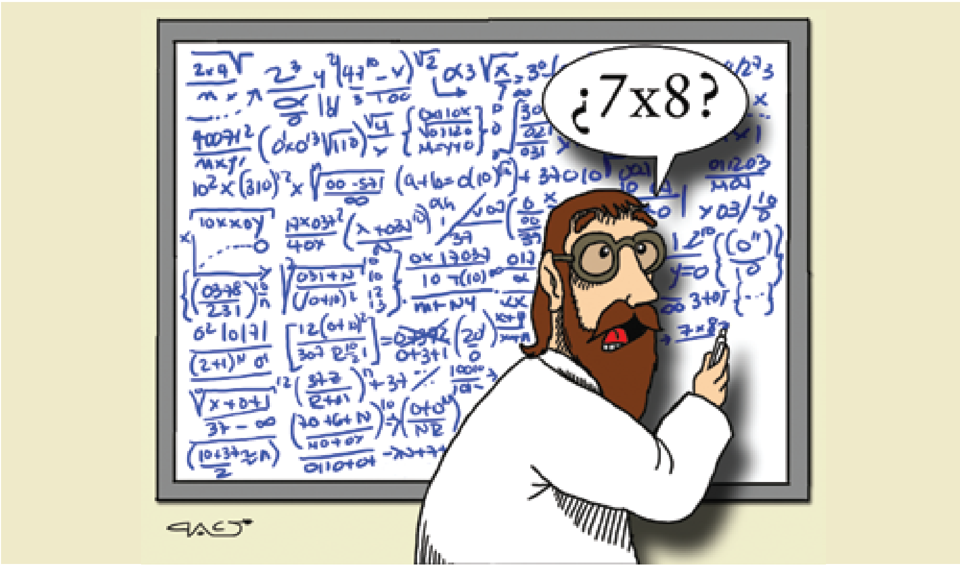
Douglas Jiménez
UNEXPO

ORM

ABRIL 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				**1** ¿Cuál es el producto de todos los dígitos del número 2011?
4 $0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 5$ es igual a:	**5** La mitad de la suma de dos números es 20. Si uno de los números es 7, ¿cuál es el otro número?	**6** Ana Raúl y Carlos gastan Bs. 48, de los cuales Ana gastó la mitad y un tercio lo gastó Raúl. ¿Cuánto gastó Carlos?	**7** El promedio de 21 números enteros consecutivos es 31. ¿Cuál es el mayor número entero de ellos?	**8** ¿Cuántos cuadrados blancos debes pintar de gris para que el número de cuadrados grises sea igual a un medio del número de cuadrados blancos? 
11 Al contar de tres en tres, ¿qué número viene después de 24?	**12** ¿Cuántas caras tiene este cuerpo? 	**13** La edad de un hombre es igual al número formado con los dígitos de la edad de su esposa en orden invertido. La suma de las edades de la pareja es 99 años y el hombre es 9 años mayor que su esposa. ¿Cuál es la edad de la esposa?	**14** En la multiplicación, las letras representan dígitos diferentes. Halla la suma $A + B$. $\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ \ 6 \\ \hline 2\ B\ A \end{array}$	**15** Tu papá le da a tu mamá la mitad del dinero que tenía en su bolsillo. El 25 % del resto a tu hermano y una tercera parte del resto a tu hermana. Lo que le queda lo reparte contigo en partes iguales. Si te dió Bs. 500, ¿cuánto tenía tu papá en el bolsillo?
18 *La Escuela de Pitágoras llegó a afirmar que las mismas proporciones aritméticas que se encuentran en la Música en los tonos, se encuentran en el Universo, y por eso los planetas y las estrellas, en su movimiento, producen una Música perfecta: La Música de las Esferas.*	**19** *Kepler(1561-1630), el padre de la Astronomía moderna, afirmó que la relación entre la masa de los planetas y su velocidad de traslación provocaba que éstos produjesen sonido, cada uno con su propia tesitura.*	**20** 	**21** *Saturno y Júpiter, los planetas de mayor tamaño, tienen el registro más grave, en clave de Fa, mientras que Marte, la Tierra, Venus y Mercurio, tienen un registro más agudo, en clave de sol, y es más agudo cuanto más pequeño es el planeta.*	**22** *Buscando confirmar la ancestral tradición de la Música de las Esferas y de la armonía universal, un satélite enviado al espacio por la NASA (TRACE), encontró las primeras evidencias de que un cuerpo celeste emite sonidos armónicos.*
25 El primero de mayo cae día domingo. El cumpleaños de Antonio es el 29 de mayo. ¿En cuál día de la semana es el cumpleaños de Antonio?	**26** El Libertador Simón Bolívar nació el 24 de julio de 1783 y el 24 de junio de 1821 se realizó la Batalla de Carabobo. ¿Qué edad, en años, tenía Bolívar cuando se realizó esa batalla?	**27** Veinticuatro litros de leche se echan en un envase y éste se llena hasta sus tres cuartas partes. ¿Cuántos litros se necesitan para terminar de llenar el envase?	**28** ¿Cuántos cuadrados de tamaño diferente hay en la figura? 	**29** La suma de dos números naturales es 77. Si el menor número se multiplica por 8 y el mayor por 6, los productos son iguales. ¿Cuál es el mayor de estos números?

Imposibilidades Matemáticas



A primera vista parece trivial hablar de imposibilidades matemáticas. Una vez que se tiene un teorema o una verdad matemática su negación lógica pasará a ser una imposibilidad. Sin embargo las imposibilidades matemáticas han estado presentes en la historia de las matemáticas y el esfuerzo por resolverlas ha contribuido enormemente al desarrollo de nuestra disciplina.

Hace más de 2500 años Pitágoras analizó la primera imposibilidad. En aquellos tiempos se consideraba que todo era número; por tal se entendía número racional. Sin embargo cuando Pitágoras quiso encontrar la medida de la diagonal del cuadrado de lado uno se encontró que esa medida no podía expresarse con un numero racional. Este problema como es bien sabido es equivalente a resolver la siguiente ecuación

$$x^2 - 2 = 0$$

Esto condujo a la invención de los números irracionales.

La prueba de la imposibilidad de asignar un número racional a la diagonal del cuadrado de lado uno está basada fundamentalmente en el llamado principio de reducción al absurdo, que consiste en negar lo que se quiere demostrar y tratar de deducir a partir de esa negación una contradicción, o alguna afirmación que niegue la hipótesis. ¿Cómo puede aceptarse a partir de una demostración lógica la existencia de ciertos objetos matemáticos, en este caso los números irracionales? ¿Legitima la lógica la existencia de los objetos matemáticos o existe algún elemento adicional para la aceptación de tales objetos?

La discusión toca profundos aspectos filosóficos, pero como dijo Kant, en general los matemáticos no están interesados en esa discusión que conduce a la epistemología y a la ontología, áreas del conocimiento consideradas como simples habladurías y especulación por parte de muchos. Sin embargo por más que se nieguen esos problemas siempre aparecen en el desarrollo de la matemática.

Lo que hay que destacar es que resolviendo ese problema los griegos lograron extender su propia concepción de los números y con ello su concepción de la realidad.

Los griegos también intentaron resolver los llamados problemas clásicos con regla y compás: la duplicación del cubo, la división del ángulo en tres partes iguales y la cuadratura del círculo. La condición regla y compás significa que la regla sólo puede utilizarse para trazar líneas y no para medir, y el compás naturalmente sólo para trazar arcos. La formulación algebraica de esta regla tomó cierto tiempo hasta que se creó la idea de números construibles o constructibles, que permitió la solución de dos de esos problemas.

La solución de la cuadratura del círculo sólo fue posible cuando Lindemann probó que el número pi no era irracional en el sentido de ser solución de una ecuación polinómica a coeficientes racionales sino que pertenecía a una clase de números diferentes: los llamados números trascendentes. La solución de las imposibilidades matemáticas ha permitido la creación de un campo de investigación no sólo en el área de las matemáticas sino de la lógica y las llamadas ciencias empíricas, conduciendo a la teoría general de la imposibilidad.

Referencias

DAVIS P. *When Mathematics Says No.* Mathematics Magazine. Vol.59. No. 2. (1986) pp. 67-76.

JONES A. *Abstract Algebra and Famous Impossibilities.* Springer Verlag. New York. 1991.

KAKU M. *Physic of the Impossible.* Doubleday. New York. 2008.

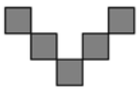
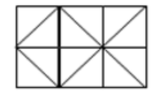
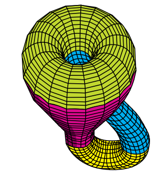
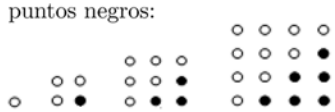
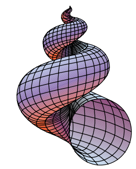
SALOMON L. *Logical impossibilities.* Philosophy and Phenomenological Research. Vol. 32. No 2 (1971). pp. 166- 187.

Alexis Rodríguez G.

Instituto Pedagógico de Caracas
Universidad Pedagógica Experimental Libertador

ORM

MAYO 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 La figura, formada de cuadrados, tiene perímetro 20 cm. Reagrupando los cuadrados, ¿cuál es el menor perímetro que puede obtenerse? 	**3** La suma de dos números pares consecutivos es 66. ¿Cuáles son los números?	**4** ¿Qué es mayor, 25 % de 75 o 75 % de 25?	**5** ¿Cuántos triángulos en la figura tienen área igual al de cualquiera de los cuadrados más pequeños? 	**6** *Prueba Regional OJM*  Sábado 7 de Mayo de 2011
9 La longitud del trozo de madera AB es 3 m. Se divide el trozo de madera en nueve partes iguales, según la figura. ¿Cuánto metros mide la parte AC? 	**10** Observa la secuencia de figuras formadas por puntos blancos y puntos negros:  ¿Cuántos puntos negros tendrá la decimoquinta figura?	**11** En un colegio hay 2048 alumnos que saldrán de paseo de la siguiente manera: el primer día sale la mitad de los alumnos, el segundo día la mitad de los que quedaban y así sucesivamente. Tú fuiste el último en salir. ¿Cuántos días transcurrieron desde que salió el primer grupo hasta que tú saliste?	**12** *Prueba Regional ORM*  Jueves 12 de Mayo de 2011	**13** El área de la región sombreada es 24 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado? 
16 Si consideramos todos los números pares entre 2 y 2010, hay cinco números pares consecutivos que suman exactamente 2010. ¿Cuáles son?	**17** Carmela quiere llevar su reloj a reparar porque observa que se retrasa 5 segundos cada hora. A las 00:00 de hoy sábado ha puesto su reloj en hora. El sábado que viene, a las 00:00 horas, ¿qué hora indicará el reloj?	**18** Los alumnos de un colegio fueron a celebrar el final de curso a un restaurante. Pidieron en total 65 platos que compartieron de la siguiente manera: los platos de ensalada los compartieron cada 4, las pizzas cada 3 y los postres cada 2. ¿Podrías averiguar cuántos estudiantes fueron a la comida?	**19** Consideremos los 2010 primeros números naturales 1, 2, ..., 2010. Separemos los pares y los impares. Tendremos 1005 pares y 1005 números impares. Supongamos que multiplicamos todos los pares entre sí. ¿En qué cifra acaba el producto?	**20** Un recipiente metálico lleno de miel pesa 6 kg, y lleno de gasolina pesa 3,5 kg. ¿Cuánto pesa el recipiente, sabiendo que la miel pesa el doble que la gasolina?
23 Tomás, Pablo y Marcos son tres hermanos de 11, 8 y 5 años de edad respectivamente. Entre los tres juntos suman Bs. 6. Pero Tomás tiene el doble de dinero que Pablo, y éste el doble que Marcos. ¿Cuánto dinero tenía Marcos entonces?	**24** En la papelería, cada cuaderno cuesta Bs. 6 y cada lápiz, Bs. 2. Por una promoción, descuentan la sexta parte del total del gasto. Susana compró 2 docenas de lápices y algunos cuadernos y pagó Bs. 180. ¿Cuántos cuadernos compró?	**25** Formamos un rectángulo grande al unir un cuadrado a otro rectángulo más pequeño. Si sabemos que el área del rectángulo grande mide 216 centímetros cuadrados, y que el perímetro del rectángulo pequeño mide el triple que el lado del cuadrado ¿cuánto es el área del cuadrado?	**26** El jardinero ha plantado esta semana 372 plantitas. Trabajó de lunes a viernes. El lunes sembró cierta cantidad, el martes sembró el doble de las que sembró el lunes, y así siguió hasta el viernes, sembrando el doble de las que sembró el día anterior. ¿Cuántas plantitas plantó el lunes?	**27** En el quiosco venden paquetes de caramelos de distintas clases. Los de fruta cuestan Bs. 2 cada uno, los de chocolate Bs. 4 y los de miel Bs. 3. Ana quiere comprar de las tres clases y quiere gastar Bs. 30. ¿De cuántas formas distintas puede gastar el dinero?
30 ¿Pertenece el 2010 a la sucesión $8, 34, 78, 140, 220, \ldots$? En caso afirmativo ¿Qué posición ocuparía?	**31** Busca el número más pequeño que cumple que si lo divides por 24 da de resto 9 y si lo divides por 97 también da de resto 9.			

Sobre las raíces de una ecuación de segundo grado con coeficientes impares

Mi tío Pedro, que era profesor de matemática, tenía por costumbre proponerme problemas matemáticos bastante interesantes. Recuerdo uno en particular:
"Si a, b y c son números impares, demuestre que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no admite solución racional".

Confieso que el enunciado me asustó un poco, pero al mismo tiempo despertó mi curiosidad. ¿Qué relación tiene el hecho de que a, b y c sean impares con el tipo de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$? Sabía que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (con coeficientes reales) tiene soluciones reales si, y sólo si, el discriminante $D = b^2 - 4ac$ es no negativo, ¿y entonces? Al no ver una clara relación, decidí resolver ecuaciones de segundo grado con coeficientes impares; entre otras, $x^2 - x - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, las cuales no son números racionales. Otras, como $x^2 + 3x + 5 = 0$, ni siquiera admiten soluciones reales. Después de mucho cavilar, razoné de la siguiente manera: las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c = 0$ son $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$.

Caso 1: Si el discriminante $D = b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no admite soluciones reales y, por tanto, no admite soluciones racionales. Nada que probar.

Caso 2: Si el discriminante $D = b^2 - 4ac > 0$, entonces el hecho de que a, b y c sean impares debe implicar que ni x_1 ni x_2 son números racionales. Observando las respectivas expresiones y sabiendo que a y b son enteros, me di cuenta que lo único que impide que x_1 y x_2 sean números racionales es que D no sea un cuadrado perfecto.

Ahí está la clave, me dije, en el discriminante. No fue difícil ver que D es un número impar. ¿Por qué? Porque b^2 es impar (el cuadrado de un impar es impar) y $4ac$ es par y la diferencia de un número impar y uno par es un número impar. Pues bien, ¿ahora qué? ¿Acaso un número impar no puede ser un cuadrado perfecto? $1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, \ldots$ son impares y cuadrados perfectos. ¿Qué patrón siguen estos números?

Veamos, si h es impar y cuadrado perfecto, existe un entero n tal que $h = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Después de varios intentos fallidos, asocié y factoricé, llegando a que $h = 4n(n+1) + 1$. ¡Ajá!, lo vi de repente: si n es par, entonces $4n(n+1)$ es múltiplo de 8; si n es impar, entonces $n+1$ es par y, de nuevo, $4n(n+1)$ es múltiplo de 8. ¡Conseguí el patrón!
Si h es un número impar y cuadrado perfecto, entonces $h = 8m+1$, para algún entero m no negativo.
Lo que equivale a decir que, al dividir un impar cuadrado perfecto entre 8, se obtiene residuo 1. Para recrearme con mi hallazgo, volví a mi lista $1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, \ldots$ y corroboré que
$1 = 8{\cdot}0+1;\quad 9 = 8{\cdot}1+1;\quad 25 = 8{\cdot}3+1;\quad 49 = 8{\cdot}6+1;\quad 81 = 8{\cdot}10+1;\quad 121 = 8{\cdot}15+1.$
El próximo paso fue analizar el discriminante y asegurarme que no tiene la forma de los impares cuadrados perfectos. Para ello, le di "forma" a a, b y c:
$b^2 = 8m+1$ (pues b^2 es cuadrado perfecto impar), $a = 2p+1$ y $c = 2q+1$, siendo m, p y q enteros, con m no negativo.
En consecuencia,
$D = (8m+1) - 4(2p+1)(2q+1) = 8m+1-16pq-8p-8q-4 = 8(m-2pq-p-q)-3.$
Haciendo $m - 2pq - p - q = t$, el cual es un entero, se tiene que $D = 8t - 3$. Nótese que: $D = 8t - 3 = 8t + (5-8) = 8(t-1) + 5$. Esto es, D no tiene la forma $8m+1$, pues al dividir D entre 8 se obtiene residuo 5. Por tanto, si a, b y c son impares y $D = b^2 - 4ac > 0$, entonces D no es un cuadrado perfecto. Fin del caso 2.
Escribí mi demostración esmerándome en justificar los pasos y se la llevé a mi tío. La leyó con mucho interés y finalmente, me dijo:

\- Te felicito. Estoy sorprendido. No es la demostración que esperaba, pero es válida. Tuviste que "encontrar" ciertos resultados previos, lo que en Matemática se llaman lemas, que te permitieran demostrar el enunciado dado, que es un teorema. Realmente, te felicito.

\- Gracias. Pero, si no es la demostración que esperabas, quiere decir que hay otra demostración. ¿Es más complicada que la que hice?

\- Yo diría que más sencilla.

Y procedió a explicármela: Supongamos que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ admite una solución racional, siendo a, b y c números impares. Esta suposición nos conduce a que existen enteros m y n, con $n \neq 0$, tal que $\frac{m}{n}$ es una solución de la ecuación dada. Supongamos que $\frac{m}{n}$ es irreducible. Como $\frac{m}{n}$ es una solución de $ax^2+bx+c = 0$, entonces $a\left(\frac{m}{n}\right)^2 + b\left(\frac{m}{n}\right) + c = 0$. De donde: $am^2 + bmn + cn^2 = 0$.
Ahora bien, como $\frac{m}{n}$ es irreducible, m y n no pueden ser ambos pares. Se nos presentan tres casos:

1. m es par y n es impar. En este caso, am^2 y bmn son pares, mientras que cn^2 es impar. Así, $am^2 + bmn + cn^2$ (par+par+impar) es un número impar e igual a cero. Lo cual es absurdo, porque cero es par.

2. m es impar y n es par. En este caso, am^2 es impar, en tanto que bmn y cn^2 son pares. En consecuencia, $am^2+bmn+cn^2$ (impar+par+par) es un número impar e igual a cero. De nuevo, la contradicción.

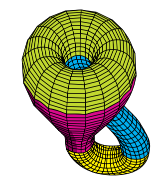
3. m es impar y n es impar. En este caso, am^2, bmn y cn^2 son impares. Luego, $am^2 + bmn + cn^2$ (impar+impar+impar) es un número impar e igual a cero. Otra vez, contradicción.

Todos los posibles casos nos conducen a una contradicción. En consecuencia, no existe un número racional $\frac{m}{n}$ que sea solución de la ecuación de coeficientes impares $ax^2 + bx + c = 0$.

Fabiola Irene Czwienczek Müller
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico de Maracay

ORM

JUNIO 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		**1** Consideremos los 2010 primeros números naturales 1, 2, ..., 2010. Separemos los pares y los impares. Tendremos 1005 pares y 1005 números impares. Supongamos que multiplicamos todos los impares entre sí. ¿En qué cifra acaba el producto?	**2** Calcular el número máximo de intersecciones que se pueden obtener con cinco rectas distintas.	**3** Iván cobra en un banco un cheque por Bs. 2700 y le pide al cajero que le entregue cierta cantidad de billetes de Bs. 10 (al menos uno), 20 veces esa cantidad de billetes de Bs. 20 y el resto en billetes de Bs. 50. ¿Cuántos billetes de Bs. 50 le entrega el cajero?
6 Un telegrama cuesta Bs. 3 las 10 primeras palabras y Bs 0,18 por cada palabra adicional. Si pongo un telegrama de 15 palabras, ¿cuánto debo pagar?	**7** El siguiente número de la sucesión $5, 6, 8, 11, \ldots$ es:	**8** Un pescado pesa 9 kg; la cola pesa la mitad que la cabeza y la cabeza 4 kg menos que el cuerpo. ¿Cuánto pesa, en kg, el cuerpo?	**9** Puedo guardar un balón en una caja cúbica de 30 cm de arista. Si tenemos un cajón en forma de cubo, con 90 cm de arista, ¿cuántos balones, metidos en sus cajas, cabrán dentro?	**10** *Final Nacional OJM*  Sábado 11 de Junio de 2011
13 Una hoja de papel de forma rectangular y 56 cm de perímetro se corta a lo largo en 3 tiras y cada tira se divide en 4 partes, resultando 12 cuadrados iguales. ¿Cuál era, en cm, la longitud de la hoja?	**14** En un garaje con 32 vehículos entre motos y carros hay un total de 102 ruedas. ¿Cuántas motos hay?	**15** Si el hermano de Beatriz, Antonio, tiene un hermano más que hermanas, ¿cuántos hermanos más que hermanas tiene Beatriz?	**16** *Olimpiada de Matemáticas de Centroamérica y el Caribe* OMCC Colima, México, Junio 16 al 26	**17** Si la suma de todos los números naturales desde el 33 hasta el 78 es 2553, ¿cuál será la suma de todos los números desde el 34 hasta el 79?
20 Los 550 estudiantes de un colegio van a salir de excursión en autobús. Cada autobús tiene 64 puestos. ¿Cuántos autobuses hacen falta?	**21** Si expresamos $100^{25} - 25$ como un número entero, la suma de sus cifras es:	**22** En un avión de 108 puestos, por cada asiento libre hay 2 ocupados. ¿Cuántos pasajeros viajan en el avión?	**23** Si el dragón rojo tuviera 6 cabezas más que el dragón verde, tendrían entre los dos 34 cabezas. Pero resulta que el dragón rojo tiene 6 cabezas menos que el dragón verde. ¿Cuántas cabezas tiene el dragón rojo?	**24** *Las equivalencias entre número y figura musical son:* *1 equivale a la redonda.* *1/2 equivale a la blanca.* *1/4 equivale a la negra.* *1/8 equivale a la corchea.* *1/16 equivale a la semicorchea.* *1/32 equivale a la fusa.* *1/64 equivale a la semifusa.*
27 Hace tres años, la suma de las edades de los trillizos Antonio, Beatriz y Carlos más la edad de la hermana Diana, cuatro años mayor, era 24 años. ¿Qué edad tiene hoy Diana?	**28** El número de chicos de una clase es 2/3 del número de chicas. ¿Qué porcentaje de chicos hay en la clase?	**29** Si elijo tres números diferentes, uno de cada uno de estos conjuntos $\{6, 7, 8\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{4, 6, 8\}$, la mayor suma que puedo obtener con ellos es:	**30** La suma de las cifras del mayor número capicúa de tres cifras, que sea múltiplo de 6 es:	

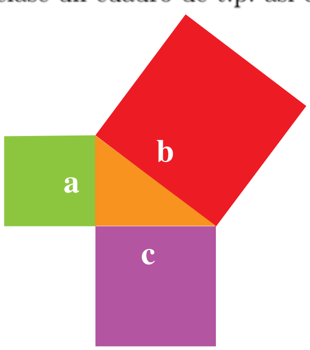
Ternas Pitagóricas Madres

Acostumbro a comenzar mi curso de matemáticas para cuarto año de bachillerato con un estudio detallado de los triángulos, antes de entrar en trigonometría: Teorema de Pitágoras, un par de teoremas de Euclides sobre triángulos rectángulos, Teorema de Thales, congruencia, semejanza y centros de un triángulo.

El viernes 22 de septiembre de 2006, durante mi segunda clase, después de haber enunciado el Teorema de Pitágoras y hacer algunas demostraciones clásicas de dicho teorema en la primera sesión, les hablé a mis alumnos sobre las ternas pitagóricas (t.p.) para números naturales, es decir, tres números naturales a, b y c que cumplen con la ecuación $a^2+b^2=c^2$ y les mencioné tres ejemplos: (3,4,5); (5,12,13) y (7,24,25). Demostramos además que si una terna (a, b, c) es pitagórica entonces las ternas de la forma (ka, kb, kc) también lo son para cualquier k natural. Las t.p. con $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$ se llaman usualmente primitivas y cada una de ellas genera infinitas t.p. no primitivas. Cheryl Sánchez, una alumna de este curso con especial inclinación por las matemáticas, mientras hacía su tarea ese fin de semana, sintió curiosidad por las t.p. y escribió en su cuaderno lo siguiente:

$$1^2+0^2=1^2; 3^2+4^2=5^2; 5^2+12^2=13^2; 7^2+24^2=25^2.$$

Usando la expresión $a_n^2+b_n^2=c_n^2$ ella notó que sus a_n formaban la sucesión de números impares y que $c_n=b_n+1$. También se dio cuenta que la diferencia de sus b_n iba aumentando cuatro unidades en cada paso, por lo que me trajo para la siguiente clase un cuadro de t.p. así construidas:

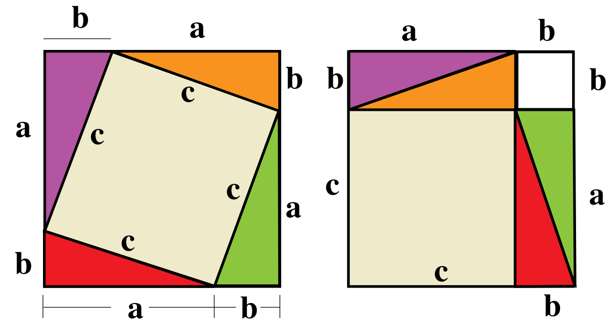


1	0	1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145

Le pregunté de qué fuente las había sacado y ella me dijo que se le habían ocurrido a ella solita, entonces le pedí que para la próxima clase me escribiera su razonamiento. No sólo me trajo su razonamiento, sino que habiendo ella encontrado t.p. recorriendo todos los impares para a_n se le ocurrió hacer lo mismo para todos los pares ya que, resolviendo un problema, se encontró con la (6,8,10) y ahora escribió lo siguiente:

$$2^2+0^2=2^2; 4^2+3^2=5^2; 6^2+8^2=10^2.$$

Aquí notó que $c_n=b_n+2$ y sospechó, ya que las dos primeras eran 3 y 5, que la diferencia de los b_n era la sucesión de números impares, con lo que obtuvo esta otra tabla:



2	0	2
4	3	5
6	8	10
8	15	17
10	24	26
12	35	37
14	48	50
16	63	65
18	80	82

Luego conjeturó que en su primera tabla había sólo t.p. primitivas, que ella bautizó como ternas "madres", y en la segunda sólo lo eran aquellas cuyo a_n era múltiplo de 4. Traduzcamos ahora lo que nos dijo Cheryl en su lenguaje de esa edad y formación a un lenguaje un poquito más formal.

Para su primera tabla nos dijo lo siguiente: $a_n=2n-1$ para todo $n\geq 1$; $b_1=0$ y $b_n=b_{n-1}+4(n-1)$ para todo $n\geq 2$; $c_n=b_n+1$ para todo $n\geq 1$. De $b_n=b_{n-1}+4(n-1)$ se sigue que $b_n=4(n-1)+4(n-2)+\cdots+4\cdot 1=2n(n-1)$. Por lo tanto $c_n=b_n+1=2n^2-2n+1$ y se verifica fácilmente que (a_n, b_n, c_n) es una t.p., que claramente es primitiva pues $\operatorname{mcd}(a_n, b_n)=\operatorname{mcd}(c_n-b_n, b_n)=\operatorname{mcd}(1, b_n)=1$. Así se concluye que Cheryl tenía razón en su primera afirmación.

Para su segunda tabla ella dice: $a_n=2n$ para todo $n\geq 1$; $b_1=0$ y $b_n=b_{n-1}+2n-1$ para todo $n\geq 2$; $c_n=b_n+2$ para todo $n\geq 1$. Entonces $b_n=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3=n^2-1$ para todo $n\geq 2$, $c_n=n^2+1$ para todo $n\geq 2$ y se verifica fácilmente que (a_n, b_n, c_n) es una t.p. De estas ternas, comienzan con un múltiplo de cuatro aquellas para las cuales n es par. Como $a_{2n}=4n$ y $b_{2n}=4n^2-1$ es claro que $\operatorname{mcd}(a_{2n}, b_{2n})=1$ y se concluye que Cheryl también tenía razón en su segunda afirmación, es decir que estas son ternas pitagóricas "madres".

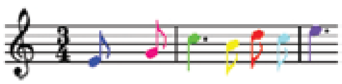
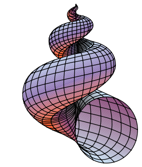
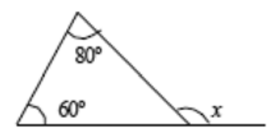
El lunes 6 de septiembre de 2010 tomé un curso sobre el "Teorema de Pitágora" que dictaba el profesor Bladismir Leal en el marco de la XIV Escuela Venezolana para la enseñanza de la Matemática en la Universidad de los Andes (Mérida), allí él señalaba que los pitagóricos ya sabían que las ternas de la forma $(2pq, p^2-q^2, p^2+q^2)$ eran pitagóricas para cualquier par de naturales p y q con $p>q$ y en el libro *Aritmética* del profesor Saulo Rada se demuestra que todas las soluciones primitivas positivas de la ecuación $a^2+b^2=c^2$ con a par y b impar vienen dadas por esta última forma. Es fácil ver que la segunda tabla de Cheryl se obtiene haciendo $q=1$ y con un poquito más de trabajo se puede verificar que la primera tabla también proviene de esta forma, pero desde mi punto de vista este "hallazgo" tiene dos valores fundamentales, primero que proviene de la intuición de una joven que aún no llegaba a sus 15 años y segundo que hemos hallado dos familias infinitas de ternas pitagóricas primitivas. Brillante la niña ¿no?

Lisandro Alvarado

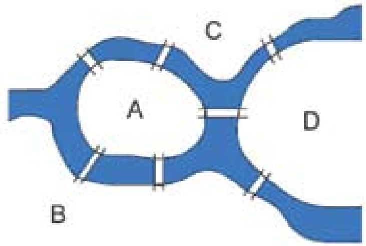
Colegio Los Hipocampitos, Los Teques

OJM

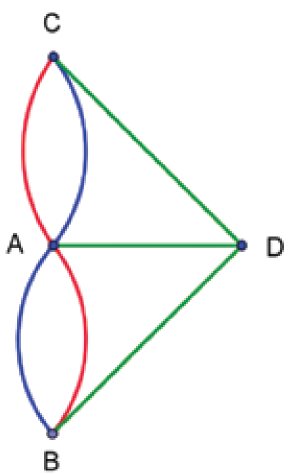
JULIO 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				**1** *Final Nacional ORM*  Sábado 2 de Julio de 2011
4 Al dividir un número entre 1027, resulta 3 de cociente y 1 de resto. ¿De qué número se trata?	**5**  	**6** Alicia y Pedro van viajando en un tren muy largo. Alicia se sube en el vagón número 17 empezando a contar por la cabeza y Pedro en el 34 empezando a contar por la cola. Si resulta que van en el mismo vagón, ¿cuántos vagones tiene el tren?	**7** Encima de una mesa hay cuadrados y triángulos, con un total de 17 vértices. ¿Cuántos triángulos hay?	**8** He tecleado un número en la calculadora. Si lo duplico, al resultado le sumo 9 y al número obtenido lo divido por 3, se obtiene el número 11. ¿Cuál era el primer número?
11 Si el área del hexágono exterior de la figura es 3 cm^2, el área de la estrella interior, en mm^2, es: 	**12** Un campo rectangular de 80 m. de longitud, tiene 3200 m^2 de área. ¿Cuál es la longitud de otro campo rectangular en el que el área y el ancho son la mitad del área y el ancho del primer campo?	**13** Nos ponemos a escribir la lista de cifras 12321232123212321... y paramos cuando hayamos escrito 2011 cifras. ¿Cuáles son las tres últimas cifras que hemos escrito?	**14** En el dibujo que te mostramos, el valor de x es:  	**15** *Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO 2011)* Amsterdam, 16 al 24 de julio.
18 $10^3 + 10^2 + 10 + 1$ es igual a:	**19** ¿Qué número está justamente en medio de $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{10}$?	**20** Una caja pesa 242 kg. cuando está llena y 188 kg. cuando está llena hasta la mitad. ¿Cuántos kg. pesa cuando está vacía?	**21** En la suma $8a7 + 7a6 + 4a8 + 9a3 + 8a4 = 3928$, el valor de la cifra a es:	**22** Tres personas reciben una cantidad de dinero directamente proporcional a los números 6, 3 y 2. Si la que menos recibe, recibe Bs. 300, la cantidad total que se ha repartido es:
25 Con los números 1, 2, 3 y 4 puedo formar 256 números de 4 cifras (por ejemplo, 3214, 1111, 2234 son algunos). ¿Cuánto vale la suma de los 256 números?	**26** Si x, y, z son números positivos tales que $xy = 24$; $xz = 48$, $yz = 72$, la suma $x + y + z$ es igual a:	**27** Si la longitud de cada lado de un triángulo se aumenta en un 20 %, el área aumenta en:	**28** ¿Cuánto debo pagar, en bolívares, por una llamada telefónica de 5 minutos, si el primer minuto cuesta Bs. 1 y cada minuto adicional 75 céntimos?	**29** Antonio sumó todos los números impares desde el 1 al 2011 y Beatriz sumó todos los números pares desde el 2 al 2012. La suma de Beatriz supera a la de Antonio en:

Introducción a la Teoría de Grafos



La ciudad de Königsberg, capital de Prusia oriental en el siglo XVIII, era atravesada por el río Pregel, sobre el cual había siete puentes. Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible salir de su casa, dar un paseo y regresar al punto de partida, habiendo pasado una y sólo una vez por cada puente. En 1735 Euler demostró que tal paseo era imposible, dando origen a una rama de la matemática que se conoce como *Teoría de Grafos*. Para entender la prueba representemos cada una de las 4 regiones en que estaba dividida la ciudad por un punto, uniendo dos puntos por una línea si y sólo las regiones correspondientes estaban unidas por un puente.



Así se obtiene un diagrama como el que se ve a la izquierda, que hoy en día llamamos *grafo*. En general, un grafo no es más que un diagrama compuesto por puntos (también llamados *vértices*) y líneas (también llamadas *aristas*) que unen pares de puntos. Si una línea a conecta dos puntos P y Q, se dice que P y Q son los *extremos* de a. También se dice que P y Q son *adyacentes*. La naturaleza de estos puntos y líneas es inmaterial. El número de líneas de las cuales un punto P es extremo se denomina *grado* de P y se denota $g(P)$. En el grafo de la izquierda se tiene $g(A) = 5$, $g(B) = g(C) = g(D) = 3$.

Supongamos ahora que se pueda recorrer un grafo pasando una y sola una vez por cada arista y finalizando en el mismo vértice P del cual se partió (en ese caso se dice que el grafo es *euleriano*). Entonces cada vez que se llegue a un vértice interior del recorrido por una arista, se debe salir de él por otra. Por lo tanto cada vértice interior debe tener grado par. Y lo mismo vale para P, pues la última arista del recorrido forma pareja con la primera, y cualquier otra llegada a P debe tener su salida correspondiente. Como en el grafo de los puentes de Königsberg hay cuatro vértices de grado impar, el problema que se planteaban los habitantes de la ciudad no tiene solución.

En general se dice que un grafo es *conexo* si partiendo de un vértice se puede llegar a cualquier otro pasando de arista en arista. Puede probarse que un grafo es euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Denotemos mediante $|X|$ el número de elementos de un conjunto finito X. Entonces, si V y A son los conjuntos de vértices y aristas de un grafo, respectivamente, se cumple la sencilla relación siguiente:

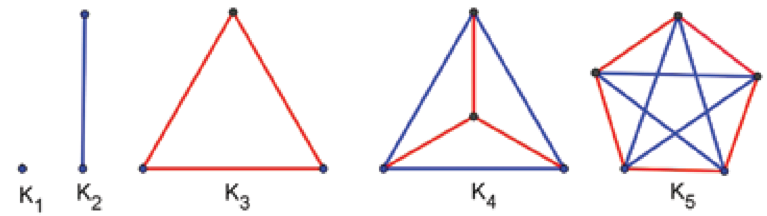
$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|.$$

En palabras: la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas. La prueba es sencilla: cada arista contribuye en una unidad al grado de cada uno de sus extremos. Veamos una aplicación:

Problema. En una reunión algunas personas se saludan dándose la mano. El número de personas que dieron un número impar de apretones de mano, ¿es par o impar?

Solución. Es siempre par. Si tomamos a las personas como vértices de un grafo, y los saludos como aristas, el número de saludos que dió cada persona es su grado. Como la suma de los grados es par, la cantidad de sumandos impares debe ser par.

Si un grafo tiene n vértices y cada par de vértices está unido por una arista, se dice que es un grafo *completo* y se denota K_n. La figura siguiente muestra los grafos K_1, K_2, K_3 (triángulo), K_4 (que es el grafo formado por los vértices y aristas de un tetraedro) y K_5, que no se puede representar en el plano sin que las aristas se corten.



Problema. Cada arista de K_6 se pinta o bien de rojo o bien de azul. Muestre que, no importa como se haga, siempre hay un triángulo rojo o un triángulo azul.

Solución. Sea P un vértice. De las 5 aristas que unen P a los vértices restantes, deben haber al menos 3 azules o 3 rojas. Supongamos que haya 3 rojas que unen P a Q, R y S. Si las tres aristas QR, RS y SQ son azules, tenemos un triángulo azul. Si en cambio alguna de ellas, digamos QR, es roja, entonces PQR es un triángulo rojo. Este problema a veces se plantea así: Muestre que en una reunión donde hay 6 personas, siempre hay tres mutuamente conocidas o tres desconocidas entre sí.

El resultado que se acaba de ver admite varias generalizaciones. La más simple es el siguiente Teorema (debido a Ramsey): Dado un par de enteros positivos (r, s), existe un menor entero positivo $n = R(r, s)$ tal que, si las aristas de K_n se colorean con rojo y azul, se puede extraer un K_r completamente rojo o un K_s completamente azul.

El problema anterior muestra que $R(3, 3) \leq 6$, y la coloración de K_5 que se ve en la figura de arriba muestra que $R(3, 3) > 5$. Por lo tanto $R(3, 3) = 6$.

Ejercicios: Muestre que $R(2, n) = n$ y $R(3, 4) = 9$.

Calcular los *números de Ramsey* $R(r, s)$ es un problema de investigación. Por ejemplo, se sabe que $R(4, 4) = 18$ y $R(4, 5) = 25$, pero ya $R(5, 5)$ no se conoce: sólo se sabe que está entre 43 y 49.

José Heber Nieto
Departamento de Matemáticas
Universidad del Zulia

OJM

AGOSTO 2011

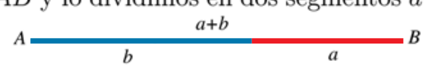
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 Si 3 plumas cuestan lo mismo que 7 lapiceros, 42 lapiceros costarían lo mismo que ¿cuántas plumas?	**2** En mi colegio hay 120 niños entre 7° y 8°. Dos de cada tres tienen el pelo negro. ¿Cuántos niños de 7° y 8° de mi colegio no tienen el pelo negro?	**3** ¿Cuántas cifras tiene como máximo el producto de un número de tres cifras por otro de 2?	**4** Aquí tienes, desordenadas, las fechas de cumpleaños de Antonio, Beatriz, Carlos y Darío: marzo 1, julio 20, mayo 17 y marzo 20. Beatriz y Carlos nacieron el mismo mes, Antonio y Carlos cumplen años el mismo día. ¿Quién nació el 17 de mayo?	**5** El mayor múltiplo de 7 menor que 200 es:
8 Un mapa de carreteras está hecho a escala 1:400.000. Si en el mapa la distancia entre dos pueblos es de 5 cm, ¿cuál es la distancia real en km?	**9** Al escribir en fila todos los números enteros del 1 al 1000, observo que hay cinco consecutivos cuya suma es 600. ¿Cuál es el más pequeño de estos cinco números?	**10** El torniquete que marca el número de visitantes que hay en la puerta del Museo de Ciencia, señala en cierto instante 1879564, que es un número que tiene todas sus cifras distintas. ¿Cuántos visitantes tienen que entrar como mínimo para que esto vuelva a pasar?	**11** ¿En cuánto rebasa la suma de los 10000 primeros números positivos pares a la suma de los 10000 primeros positivos impares?	**12** ¿De cuántas maneras (sin importar el orden de los sumandos) se puede obtener 50 como suma de dos primos?
15 La edad media de 5 osos es 120 meses. ¿Cuál es, en años, la suma de sus edades?	**16** Un helicóptero puede volar 90 minutos con un tanque lleno de combustible. ¿Cuántos tanques harán falta para que vuele 6 horas?	**17** La suma de los veinte primeros números enteros positivos consecutivos es 210. Entonces la suma de los primeros cuarenta números enteros positivos es:	**18** Una fotocopiadora hace 9000 fotocopias en una hora y otra 3000. Puestas en funcionamiento las dos a la vez, ¿cuántos segundos tardarán en sacar 1000 fotocopias?	**19** Colocando un 1 al final de un número, su valor aumenta en 13789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?
22 ¿Cuál es el primer año después de 2011 que sea el producto de 3 enteros consecutivos?	**23** ¿De cuántas formas puedo repartir 12 caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos 3?	**24** ¿Cuántos números hay de tres cifras $a5b$ que sean múltiplos de 12?	**25** Al dividir un número entre 7 obtenemos un resto de 2. ¿Qué resto obtendremos si añadimos 2011 a dicho número y lo dividimos entre 7?	**26** ¿Cuántos capicúas de tres cifras son múltiplos de 11?
29 A las tres de la tarde, el ángulo entre las agujas de un reloj es 90º. ¿Qué ángulo formarán 10 minutos más tarde?	**30** ¿Cuántos números enteros comprendidos entre 100 y 999 verifican que el producto de la cifra de sus unidades por la cifra de sus decenas, coincide con la cifra de sus centenas?	**31** Pedro tiene 20 bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. 17 no son verdes, 5 son rojas y 12 no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?		

Arte y Matemáticas

"Lo bello es lo que nos deleita", decía Platón. El arte y la matemática han estado relacionados desde siempre. Ambos comparten la búsqueda de la perfección, el sentido del orden y de la estética, el estudio del espacio y el tiempo, el beneficio de la dimensión, el reconocimiento de patrones y formas. Ambos buscan entender la naturaleza y crean modelos que la representen.

Un artista y un matemático tienen denominadores comunes, trabajan con proporciones, con simetrías, con el rectángulo dorado, con teselaciones. Ambos se dedican al estudio de la belleza: de la armonía y del caos. La matemática misma es arte. Para entender esto, solamente basta adentrarse en la perfección de un argumento lógico con todas sus partes. Por otro lado, el arte es proporción, es justificación, carece de contradicción a los ojos del artista, el arte es matemáticas. Ambos estudian la dualidad entre lo finito y lo infinito. El matemático usa los grupos algebraicos para investigar las simetrías; el artista plástico las estudia y las plasma en su obra. No es casualidad que objetos tan simples como una tarjeta de crédito tengan la forma y tamaño que tienen, ni que estructuras arquitectónicas tan complejas como el partenón sean como son. Han nacido de esta comunión entre la matemática y el arte, entre lo exacto y lo bello. El arte utiliza y le da sentido a la matemática y ésta a su vez guía y transforma el arte. Esta relación entre el arte y la matemática ha ayudado no solamente a que se use la matemática para explicar el concepto de belleza, sino que el arte ha contribuido al desarrollo de técnicas matemáticas.

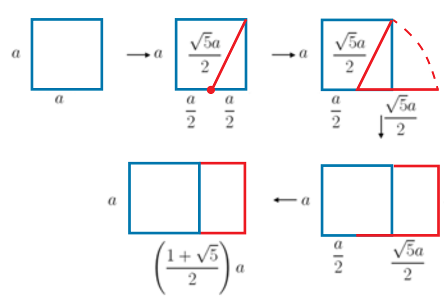
Algunos de los elementos fundamentales de la matemática que se usan en el arte es el número y el rectángulo dorados.
Si consideramos un segmento AB y lo dividimos en dos segmentos a y b de tal manera que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a+b}{b}$, obtenemos



$b^2 = ab + a^2$ y al dividir por a^2, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = \dfrac{b}{a} + 1$. Si $x = \dfrac{b}{a}$, entonces $x^2 = x + 1$.
Usando la fórmula cuadrática tenemos que $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Es decir que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033\ldots$ que es conocido como el **número dorado** ϕ.

Podemos construir un **rectángulo dorado** partiendo desde un cuadrado y siguiendo los pasos que se muestran a continuación.



El rectángulo dorado se usa en el arte y la arquitectura:

Por otro lado consideremos la sucesión de Fibonacci, la cual comienza con $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$ y los siguientes números de ahí en adelante se consiguen sumando los dos anteriores, es decir, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ y asi sucesivamente obteniendo la siguiente sucesión:

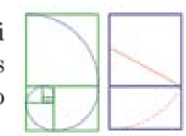
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987\ldots$$

Cuando dividimos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ conseguimos lo siguiente:

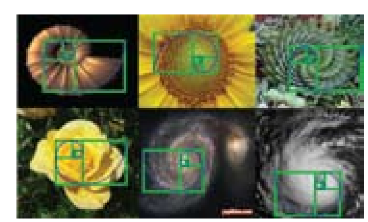
$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{13}{8}$ =1.625	$\frac{144}{89}$ =1.61797
$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{21}{13}$ =1.61538	$\frac{233}{144}$ =1.61805
$\frac{3}{2}$ =1.5	$\frac{34}{21}$ =1.61904	$\frac{377}{233}$ =1.618025
$\frac{5}{3}$ =1.66666	$\frac{55}{34}$ =1.61764	$\frac{610}{377}$ =1.618037
$\frac{8}{5}$ =1.60000	$\frac{89}{55}$ =1.61818	$\frac{987}{610}$ =1.618032

Notemos que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ se va aproximando al valor del número dorado ϕ.

Cuando construimos cuadrados de lado los números de Fibonacci y los colocamos uno al lado del otro como lo muestra la figura, los rectángulos que se van formando se van aproximando a un rectángulo dorado.



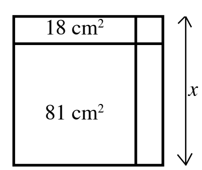
Pero la naturaleza, no se escapa de esta belleza que nos da la matemática: "una verdadera obra de arte".



Luís Fernando Cáceres Duque
Gabriel Darío Uribe Guerra
Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez

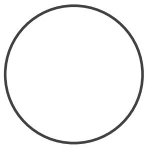
OJM

SEPTIEMBRE 2011

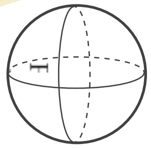
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			**1** Un rectángulo de dimensiones 1 cm y 9 cm tiene el mismo perímetro que un cuadrado de área:	**2** Diez números consecutivos suman 95. ¿Cuál es el mayor de ellos?
5 Si $\frac{1}{4}$ de un número es 6, entonces los $\frac{3}{8}$ de ese número es:	**6** Si S es la suma de los restos de las divisiones de los números 1200, 1201, 1202, 1203, 1204 y 1205 entre 6, ¿cuál es el resto de la división de S entre 6?	**7** ¿Cuántos enteros positivos menores que 10000 verifican que el producto de sus cifras es 84?	**8** La suma de tres números es 20. El primero es 4 veces la suma de los otros dos y el segundo es 7 veces el tercero. ¿Cuál es el producto de los tres?	**9** El perímetro de un triángulo equilátero coincide numéricamente con el área de su círculo circunscrito. ¿Cuánto mide el radio del círculo?
12 Un grupo de niños están jugando con sus bicicletas y triciclos en la puerta de la casa de Beatriz. Beatriz cuenta 7 niños y 19 ruedas. ¿Cuántos triciclos hay?	**13** ¿Cuántos enteros entre 999 y 2001 son múltiplos de 15, 20 y 25?	**14** Si desarrollamos el número $4^5 \times 5^{13}$, ¿cuántas cifras tendrá?	**15** En un triángulo obtusángulo isósceles, el circuncentro define un rombo con los tres vértices del triángulo. ¿Cuánto mide el ángulo obtuso?	**16** El jardín de Antonio es doble que el de Benito y triple que el de Carlos. Los tres empiezan a la vez a cortar la hierba, cada uno en su jardín. Carlos va a la mitad de rápido que Benito y la tercera parte de rápido que Antonio. ¿Quién acabó el primero?
19 Si a la tercera parte de un número se le suma 48 da como resultado el triple de ese número. ¿Cuál es el número?	**20** ¿Cuántos números primos q tienen la propiedad que q^2+1 también sea primo?	**21** El cuadrado de lado x de la figura, lo hemos dividido en dos cuadrados y dos rectángulos. ¿Cuánto mide x? 	**22** Emilio sale de casa a las 8 horas 55 minutos y llega al colegio a las 9 h 17 min. Su compañera Fátima llega al colegio a las 9 h 25 min, pero vive mucho más cerca del colegio que Emilio y tarda 12 minutos menos que él en el trayecto de casa al colegio. ¿A qué hora sale Fátima de su casa?	**23** *Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas* (Costa Rica, 23 de septiembre a 1 de octubre)
26 Para dar un paseo de 1000 m en su jardín rectangular, Pedro tiene que recorrer 25 veces su lado mayor o dar 10 vueltas completas alrededor del jardín. ¿Cuál es el área del jardín de Pedro?	**27** Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en 14789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?	**28** ¿Cuántos números enteros hay entre $\frac{5}{3}$ y 2π?	**29** ¿Cuál es la cifra de las unidades de $19^{99}+99^{99}$?	**30** El número 64 tiene la propiedad de ser divisible por la cifra de sus unidades. ¿Cuántos números enteros comprendidos entre 10 y 50 tienen esta propiedad?

Una breve historia de π

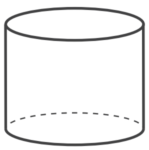
Posiblemente todos alguna vez nos hemos encontrado con π. No se requiere ser matemático para identificar ese simbolito tan particular y recordar que "algo tiene que ver con el círculo". π representa en realidad un número especial que aparece en todas las fórmulas donde algo tiene forma de circunferencia, esfera, cono o similares (aunque no se limita a esas fórmulas). Como ejemplo, a continuación se encuentran algunas de las fórmulas geométricas básicas en las que π hace aparición estelar:



Círculo
Circunferencia= $2 \times \pi \times$Radio
Área= $\pi \times (\text{Radio})^2$



Esfera
Superficie= $4 \times \pi \times (\text{Radio})^2$
Volumen= $\frac{4}{3} \times \pi \times (\text{Radio})^3$



Cilindro
Superficie (sin tapas)= $2 \times \pi \times$Radio$\times$Altura
Superficie (con tapa)= $2 \times \pi \times$Radio$\times$(Radio+Altura)
Volumen= $\pi \times (\text{Radio})^2 \times$Altura

Sin embargo, ¿quién o qué es ese número π? ¿Qué sabemos de π? En principio, π es una letra griega (que sería algo así como el equivalente a nuestra p) utilizada desde 1706 por parte de William Jones como símbolo de la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, pero solamente se hizo popular darle ese símbolo a partir de que el famoso matemático Leonhard Euler decidió utilizarlo en 1737.
Es conocida por gran cantidad de personas la expresión 3.14 para hacer cálculos con π, algunos hasta 3.1416, aunque estas expresiones no son exactas. π es un *número irracional*, lo que significa que no es posible escribirlo como la división de dos números enteros, por lo que además su expresión decimal no acaba y tampoco se vuelve repetitiva. La escritura decimal de π, con sus primeros veinte dígitos decimales, es

$$\pi = 3.14159265358979323846\ldots$$

aunque como ya se dijo, esta escritura no termina jamás y tampoco se hace repetitiva.
La historia está llena de aproximaciones a π, siendo las primeras de estas aproximaciones presentadas como fracciones. Por ejemplo, se cree que los egipcios tenían un concepto de π en el que

$$\pi \approx \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3.16049382716049382716\ldots,$$

mejorado ligeramente por los babilonios hacia el año 1900 a.C., que ya conocían una buena parte de la importancia de π y por eso tenían como fundamento para utilizar en sus cálculos el valor

$$\pi \approx \frac{25}{8} = 3.125.$$

Más adelante en la India, alrededor del año 900 a.C. se generó la aproximación

$$\pi \approx \frac{339}{108} = 3.13888888888888888888\ldots$$

que fue la mejores aproximaciones conocidas hasta que Arquímedes de Siracusa cerca al año 225 a.C. determinó, a través de un cálculo riguroso utilizando polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia, que

$$3.14084507042253521126\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.14285714285714285714\ldots.$$

Por su parte, el matemático chino Liu Hui alrededor del año 250 de nuestra era generó la aproximación

$$\pi \approx 3.141864,$$

mejorada casi inmediatamente a

$$\pi \approx \frac{3927}{1250} = 3.1416,$$

que es de hecho la más acertada de las aproximaciones de uso común. Sin embargo, el matemático chino Zu Chongzhi alrededor del año 500 obtuvo una de las mejores aproximaciones geométricas conocidas,

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3.14159292035398230088\ldots,$$

que fue durante muchos años el valor más acertado disponible. A partir de ese momento surgieron y siguen surgiendo todo tipo de fórmulas y métodos para aproximar el valor de π cada vez con mayor precisión. En tiempos modernos y con ayuda de equipos computacionales se ha avanzado considerablemente en el cálculo preciso de π, por ejemplo, Yasumasa Kanada, investigador de la Universidad de Tokyo, calculó en 1999 la sorprendente cantidad de 206158430000 dígitos decimales de π, marca que él mismo superó cuando en 2002 reportó haber calculado 1241100000000 dígitos decimales de π.
Dentro del desarrollo del estudio de π, destacando además sus sorprendentes conexiones con otras áreas de las matemáticas, se han encontrado todo tipo de fórmulas que permiten calcular su valor con mayor o menor precisión, siendo algunos ejemplos muy curiosos las fórmulas

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \cdots$$

¿Qué nos entregará π más adelante?

Oscar Bernal
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

OJM

OCTUBRE 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 De los 30 estudiantes de una clase, 20 se lavan los dientes después de cada comida, 18 van una vez al año al dentista y 9 hacen ambas cosas. ¿Cuántos no toman ninguna de estas medidas?	**4** Ana y Sara fueron una vez igual de altas. Desde entonces, Sara ha crecido el 20 % mientras que Ana ha crecido la mitad de centímetros que Sara. Si Sara tiene ahora 156 cm de altura, ¿Cuánto mide, en cm, Ana actualmente?	**5** ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación $(2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0$?	**6** ¿Para cuántos enteros positivos n resulta que n^2-3n+2 es un número primo?	**7** Si $$8^{670}+2^{2011}+4^{1006}=14\times 16^x,$$ entonces x es igual a:
10 El profesor le pidió a Sara que restara 3 de cierto número y luego dividiera el resultado entre 9. En vez de hacer eso, Sara le restó 9 al número y dividió el resultado entre 3, obteniendo 43. ¿Qué habría obtenido si hubiera hecho lo que le dijeron?	**11** Si el producto de tres números enteros consecutivos es 8 veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?	**12** *El oído humano tiene una “construcción” tal, que los sonidos cuyas frecuencias están en la proporción simple (2/1, 3/2, 4/3 etc), suenan juntos de una manera agradable. Casi todos los procesos físicos que producen sonidos producen también “frecuencias armónicas”.*	**13** En cierto año, el mes de julio tiene 5 lunes. De los siguientes días de la semana, ¿cuál es seguro que no aparece 5 veces en el mes de agosto de ese mismo año?	**14** ¿Para cuántos enteros positivos n es $\frac{n}{20-n}$ el cuadrado de un número entero?
17 Las dos raíces de la ecuación $x^2-63x+k=0$ son números primos. El número de posibles valores de k es:	**18** La ecuación $x^2+ax+b=0$ tiene soluciones a y b que son números distintos de cero. El par (a,b) es:	**19** Si A, B y C son números para los que $1001C-2002A=4004$ y $1001B+3003A=5005$, la media aritmética de ellos es:	**20** El número $25^{64}\times 64^{25}$ es el cuadrado de un número entero positivo N. ¿Cuál es la suma de las cifras de N?	**21** ¿De cuántas formas diferentes pueden ordenarse 8 personas en una fila en frente de una cafetería?
24 Si x e y son números diferentes tales que $2011+x=y^2$ y $2011+y=x^2$, el valor del producto xy es:	**25** Si a es solución de la ecuación $x^4+x^2-1=0$, el valor de a^6+2a^4 es:	**26** Al copiar una multiplicación de dos números, David escribió un factor 54 en lugar de 45, siendo la respuesta 198 unidades mayor que la que tendría que haber obtenido. ¿Cuál era la respuesta correcta a esa multiplicación?	**27** Si x e y son números reales tales que $(x^2-y^2)(x^2-2xy+y^2)=3$ con $x-y=1$, el valor de xy es:	**28** Si $x=11°$, halle el valor de $(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^2-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.
31 Si la parábola $$y=x^2+8x+k$$ tiene su vértice en el eje de abscisas, el valor de k es:				

Códigos correctores de errores

El problema 6 de la Olimpiada Brasileña de Matemáticas (OBM) de 2002 fue el siguiente:

Problema. *Arnaldo y Beatriz irán a acampar y para comunicarse utilizarán señales de humo, a veces formarán una nube grande, otras veces una pequeña.*
Antes del desayuno, Arnaldo consigue enviar una sucesión de 24 *nubes. Como no siempre Beatriz consigue diferenciar una nube pequeña de una grande, deciden hacer un diccionario previo a la acampada. El diccionario contiene* N *sucesiones de nubes (como, por ejemplo,* $PGPGPGPGPGPGGPGPGPGPGPGP$ *donde* P *significa nube pequeña y* G *significa nube grande). Para cada sucesión, el diccionario indica su significado. Para evitar confusiones, Arnaldo y Beatriz evitaron incluir en el diccionario sucesiones parecidas. Más precisamente, dos sucesiones distintas en el diccionario difieren en al menos* 8 *de las* 24 *posiciones. Demostrar que* $N \leq 4096$.

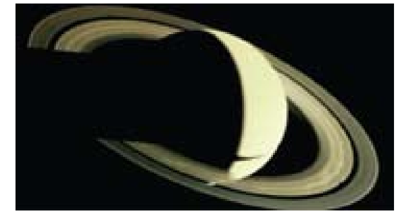
Solución: Para cada sucesión a en el diccionario, sea $S(a)$ el conjunto de las sucesiones de 24 nubes que difieren de a en a lo sumo 4 posiciones. Si a y b son dos sucesiones distintas en el diccionario, como a y b difieren en por lo menos 8 posiciones $S(a)$ y $S(b)$ tienen en común solamente las sucesiones que difieren de ambas en cuatro posiciones.
Veamos a cuántos conjuntos $S(a)$ cada sucesión puede pertenecer: si una sucesión x difiere en cuatro posiciones de a y en cuatro posiciones de b, estas ocho posiciones no pueden tener repeticiones, pues en caso contrario a y b no tendrían 8 posiciones diferentes. Por lo tanto, x pertenece a lo sumo a $24/4 = 6$ conjuntos $S(a)$ distintos.
Por lo tanto, considerando que cada sucesión puede pertenecer a seis conjuntos $S(a)$ y la unión de los conjuntos $S(a)$ van a cubrir a lo sumo todas las 2^{24} sucesiones,

$$N \cdot \left(\binom{24}{0} + \binom{24}{1} + \binom{24}{2} + \binom{24}{3} + \frac{1}{6}\binom{24}{4} \right) \leq 2^{24} \iff N \leq 4096.$$

Este juguete de señales de humo es, en verdad, un caso particular de los *códigos correctores de errores*. Estos códigos son utilizados en cualquier transferencia de datos, como teléfonos móviles y la Internet.
Tales códigos funcionan de la siguiente manera: uno *codifica* su mensaje y este mensaje codificado es enviado; este puede sufrir diversas alteraciones por los más diversos motivos, por eso no es necesariamente lo que será recibido; pero de igual forma utilizando los códigos correctores de errores es posible *decodificar* el mensaje de modo que es posible obtener los datos originales.

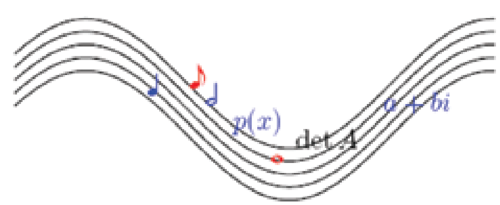
$$\text{datos} \longrightarrow \boxed{\text{codificador}} \longrightarrow \text{mensaje} \longrightarrow \boxed{\text{errores}} \longrightarrow$$
$$\text{mensaje alterado} \longrightarrow \boxed{\text{decodificador}} \longrightarrow \text{datos recuperados}$$

El funcionamiento de esos códigos está basado en las más diversas partes de la Matemática, como topología, álgebra y geometría proyectiva.
En nuestro problema, ¿cómo funcionaria la decodificación? Basta mirar a cual de los conjuntos $S(a)$ pertenece el mensaje y tomar el valor a correspondiente. Por ejemplo, si $a = PGPGPGPGPGPGGPGPGPGPGPGP$ y se ha recibido $PPPGPGPGPGPPPPGPGPGPGPGP$, entonces está claro que se ha enviado a, pues sólo puede pertenecer a $S(a)$. Un código que alcanza las condiciones del problema puede corregir a lo sumo 3 errores.



Existe un código que alcanza la igualdad en el problema, el *código de Golay*, que es basado en uno de los grupos de Mathieu, uno de los grupos esporádicos. Este código fue utilizado para enviar fotos de Júpiter y Saturno desde sondas espaciales. Al lado está una de las fotos transmitidas.
Otro código utilizado para enviar imágenes desde el espacio es el código de Reed-Muller, que es basado en geometría proyectiva. Las siguientes fotos de Venus y Mercurio fueron sacadas y enviadas con ayuda de este código:

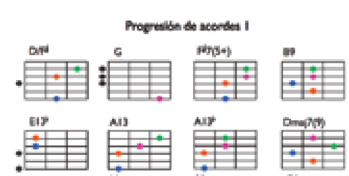
Los códigos correctores de errores utilizados en grabaciones de CDs y DVDs son los *códigos de Reed-Solomon*, que utilizan ampliamente números complejos, polinomios, matrices y determinantes.
¡Así que si escuchas música o ves un DVD, es gracias a matemática avanzada como números complejos, polinomios, matrices y determinantes!



Carlos Yuzo Shine
Departamento de Matemática
Escola Superior de Engenharia e Gestão (ESEG) – Brasil

OJM

NOVIEMBRE 2011

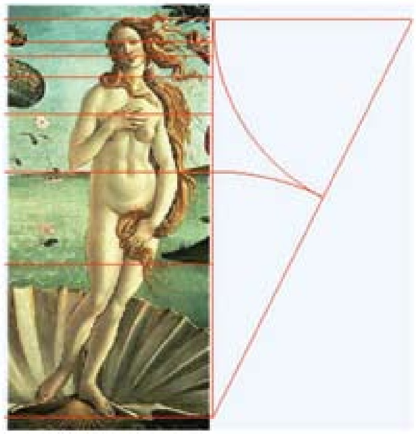
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 ¿Cuál es el mayor divisor de $2^{14} - 1$ distinto de él mismo?	**2** ¿Cuántos números hay que sean cuadrados perfectos y divisores de 7200?	**3** Nueve amigos se compran una bicicleta cada uno. Por una parte, sabemos que la media aritmética del precio de ocho de las bicicletas es de Bs. 820. Por otra, sabemos que la bicicleta que nos falta cuesta Bs. 640 más que la media aritmética de todas las bicicletas. ¿Cuánto cuesta esta última bicicleta?	**4** ¿Podrías decir en qué cifra termina el producto de 3 elevado a 27653 por 7 elevado a 79578?
7 Si $\log(xy^3) = 1$ y $\log(x^2y) = 1$, ¿cuánto vale $\log(xy)$?	**8** En un cuadrado $ABCD$ de lado 18 cm, se toma un punto E sobre el lado AB de forma que $EB = 5AE$. Se trazan EC y la diagonal DB, que se cortan en F. Encuentra el área del triángulo BFC.	**9** Calcula las soluciones reales de la ecuación siguiente: $(97 - x)^{1/4} + x^{1/4} = 5$.	**10** Consideramos el número $S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + 9999\ldots9999$, siendo el último sumando un número escrito con 99 nueves. Determina la suma de los dígitos del número S.	**11** Tres futbolistas de un equipo, Antonio, Braulio y Carlos, han conseguido durante la temporada 50 goles. Sabiendo que entre Antonio y Braulio han conseguido 34, y que entre Antonio y Carlos han conseguido 36, ¿podrías decir los que ha conseguido Carlos?
14 Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, 96 unidades, y la altura sobre la hipotenusa, que mide 96/5 unidades.	**15** Decimos que un conjunto E de números naturales es *especial* cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos (a, b) del conjunto E se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto ab. Encuentra el conjunto especial formado por los tres elementos más pequeños posibles.	**16** A un número de 3 cifras le damos la vuelta, es decir, intercambiamos las cifras de las unidades y la de las centenas, resultando un número mayor, que multiplicado por el original, da 65125. ¿Cuál era el número original?	**17** Si el resto de las divisiones de 1059, 1417, y 2312 entre el entero d, mayor que 1, es siempre el mismo, calcula d.	**18** Halla todos los números naturales n que verifican la condición $\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor 2n/3 \rfloor = n + 335$, donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x (esto es, $\lfloor 1.32 \rfloor = 1$; $\lfloor 2 \rfloor = 2$; $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$; $\lfloor 3.14159\ldots \rfloor = 3$, etc).
21 Los enteros positivos 30, 72 y N tienen la propiedad de que el producto de cualesquiera dos de ellos es múltiplo del tercero. ¿Cuál es el menor valor posible para N?	**22** Los pesos de todas las parejas posibles formadas con cinco estudiantes son: 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg y 101 kg. ¿Cuánto pesan en total los cinco estudiantes?	**23** En un congreso hay hombres y mujeres. Abandonan 15 mujeres el congreso y entonces quedan 2 hombres por cada mujer. A continuación abandonan el congreso 45 hombres y quedan entonces 5 mujeres por cada hombre. ¿Cuántas personas participaban inicialmente en el congreso?	**24** Determina el menor entero positivo N tal que el producto $3999 \times N$ termine en 888.	**25** Si x, y, z son números distintos y las ternas (x, y, z) y (x^3, y^3, z^3) forman progresión aritmética, calcula el número y.
28 Halla todos los números racionales m tales que $m + \frac{1}{m}$ sea entero.	**29** Hay un único valor real de x para el que la mediana y la media aritmética de los cinco números 4, 2, 16, 6 y x son iguales. Calcula ese valor.	**30** Calcula la suma de los 120 números de 5 cifras, no repetidas, que se pueden formar con las cifras 1 , 2 , 3 , 4 y 5.		

La razón áurea y los números de Fibonacci

El número

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (1)$$

es un irracional de gran abolengo histórico que suele llamarse la **razón áurea**. Los griegos clásicos consideraban que una forma rectangular cuya razón entre sus lados fuese $x = 1,618033989...$ producía la mejor impresión estética. Conforme a esta idea diseñaron templos y estatuas. También los artistas del Renacimiento (Botticelli, Da Vinci, etc.) emplearon esta "divina proporción" en sus obras.



Nótese que (1) es la raíz positiva de la ecuación de segundo grado

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad (2)$$

Consideremos por otro lado la sucesión infinita

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots \qquad (3)$$

cuyo término general designaremos por u_n y que se define como

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1 \quad \text{y} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \forall n > 2$$

–de modo que cada término es igual a la suma de los dos anteriores.

Leonardo de Pisa
(1170-1250)

Esta secuencia de enteros fue estudiada por Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, por el año 1202 en su obra *Liber Abaci*. Tiene una riqueza sorprendente de propiedades y se presenta en las más variadas situaciones, desde la reproducción de los conejos hasta en muchas ramas de la Matemática y de las Ciencias Naturales. Ha quedado con el nombre de **sucesión de Fibonacci**. Veremos que existe un vínculo interesante entre ella y la razón áurea.
Multipliquemos por u_n la ecuación (2) para obtener

$$u_n x^2 - u_n x - u_n = 0$$

Ahora expresamos el coeficiente de x como $u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ y obtenemos $u_n x^2 + u_{n-1}x = u_{n+1}x + u_n$, de donde

$$x = \frac{xu_{n+1} + u_n}{xu_n + u_{n-1}} \qquad (4)$$

Esta identidad sugiere considerar la sucesión de fracciones $r_n = u_{n+1}/u_n$; es decir

$$r_1 = \frac{1}{1} \qquad r_2 = \frac{2}{1} \qquad r_3 = \frac{3}{2} \qquad r_4 = \frac{5}{3} \qquad \cdots$$

Si a, b, c, d son enteros positivos, se puede probar que la fracción $(a+c)/(b+d)$ se encuentra comprendida entre a/b y c/d.
En consecuencia, el número x expresado en (4) está comprendido entre

$$r_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{xu_{n+1}}{xu_n} \qquad \text{y} \qquad r_{n-1} = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

Proponemos al lector que demuestre, aplicando el Principio de Inducción, que la sucesión de Fibonacci satisface la identidad

$$u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^{n+1} \qquad (\forall n > 1) \qquad (5)$$

De (5) se deduce

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n u_{n-1}} \implies |r_{n-1} - r_n| = \frac{1}{u_n u_{n-1}}$$

y, como x está entre cada par de consecutivas r_n y r_{n-1}, tenemos

$$|x - r_n| < |r_{n-1} - r_n| = \frac{1}{u_n u_{n-1}} \qquad (6)$$

Ahora bien, es claro que los términos de Fibonacci u_n crecen indefinidamente a medida que n se hace grande, luego $(1/u_n u_{n-1}) > 0$ puede hacerse arbitrariamente pequeño. Significa que, en virtud de (6), r_n se aproxima tanto como se quiera a x con sólo tomar n lo suficientemente grande. Esto demuestra, como el joven lector aprenderá más adelante, que

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

No sólo hemos establecido un vínculo interesante entre la sucesión de Fibonacci y la razón áurea, sino que hemos construido un eficaz algoritmo para calcular x. Por ejemplo, el cociente $r_{18} = u_{19}/u_{18} = 4181/2584 = 1,618034056\ldots$ aproxima a x con un error menor que $1/(u_{17}u_{18}) = 1/(1597 \times 2584) < 10^{-6}$ o sea que tiene al menos 5 decimales exactos.

Ignacio L. Iribarren
Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales
y Universidad Simón Bolívar

OJM

DICIEMBRE 2011

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			**1** Un triángulo isósceles de lados 5, 5 y 6, está inscrito en una circunferencia. Calcula el radio de ésta.	**2** Encuentra el mayor entero x tal que $x^{2/5} - x^{1/5} = 2$.
5 Si el número de 5 cifras $5\,D\,D\,D\,D$ es divisible por 6, calcula el valor de D.	**6** Una función f definida para los enteros positivos verifica que $f(m) + f(n) = f(m \cdot n)$ cualesquiera que sean los números enteros positivos m y n. Si $f(2) = 8$ y $f(3) = 10$, calcula $f(12)$.	**7** Calcula cuántos múltiplos de 10, positivos y menores que 156 son suma de cuatro enteros consecutivos.	**8** Un famoso matemático escribió en 1864: “En algún momento de mi vida, hace algunos años, el cuadrado de mi edad coincidió con ese año.” ¿En qué año nació?	**9** Llamamos primos *trillizos* a aquellas ternas de primos (a, b, c) con $b - a = 2$ y $c - b = 2$. Halle todas las ternas de primos trillizos.
12 Las raices de la ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$ son también raíces de la ecuación $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5 = 0$. ¿Cuál es la tercera raiz de la segunda ecuación?	**13** Halle un número de tres dígitos abc tal que $49a + 7b + c = 286$.	**14** ¿Cuál es la suma de los primeros 15 múltiplos positivos de 6?	**15** El triángulo ABC es rectángulo con ángulo recto en A. El círculo con centro A y radio AB intersecta a BC y AC internamente en D y E, respectivamente. Si $BD = 20$ y $DC = 16$, determine AC^2.	**16** Determine todos los pares de enteros (x, y) que satisfagan la ecuación $6x^2 - 3xy - 13x + 5y = -11$.
19 Determine la suma de los ángulos A, B, donde $0° \leq A, B \leq 180°$ y $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos A + \cos B = \frac{1}{2}$.	**20** Tres números forman una progresión aritmética con diferencia común 11. Si al primero se le resta 6, al segundo 1 y el tercero se dobla, los nuevos números forman una progresión geométrica. Determine los posibles valores de los tres primeros números.	**21** En el triángulo ABC, el $\angle A$ mide 120°. Sea un punto D interior al triángulo tal que $\angle DBC = 2 \cdot \angle ABD$ y $\angle DCB = 2 \cdot \angle ACD$. Determine la medida en grados de $\angle BDC$.	**22** Resuelva el sistema de ecuaciones: $$xy^2 = 10^8, \frac{x^3}{y} = 10^{10}.$$	**23** Determine todos los puntos interiores al segmento de extremos (-4,11) y (16,-1) cuyas coordenadas son enteros positivos.
26 ¿Cuál es la cifra de las unidades de 7^{2011}?	**27** Calcula todos los enteros positivos n para los que $$n^2 - 19n + 99$$ es un cuadrado perfecto.	**28** En el triángulo ABC la circunferencia inscrita es tangente a AB en P y tiene 21 cm de radio. Si AP mide 23 cm y PB 27 cm, calcula el perímetro del triángulo.	**29** Si la media de tres números es 10 unidades mayor que el más pequeño y 15 unidades menor que el más grande y la mediana de esos tres números es 5, ¿cuál es su suma?	**30** Calcula el área del trapecio $ABCD$ de bases $AB = 52$ cm y $CD = 39$ cm, si los lados BC y DA miden 12 cm y 5 cm, respectivamente.

Soluciones Enero - Junio

Enero	
3	10045.
4	32 años.
5	0.
6	14 palomas.
7	9:45 am.
10	8 naranjas.
11	9 hojas.
12	9 cuadrados.
13	Tres quintos de metro.
14	7 caramelos.
17	23 estudiantes.
18	160.
19	6 bolas verdes.
20	5:05.
21	9.
24	28 zanahorias.
25	2400 m.
26	3.
27	3.
28	12.
31	12 pasteles.

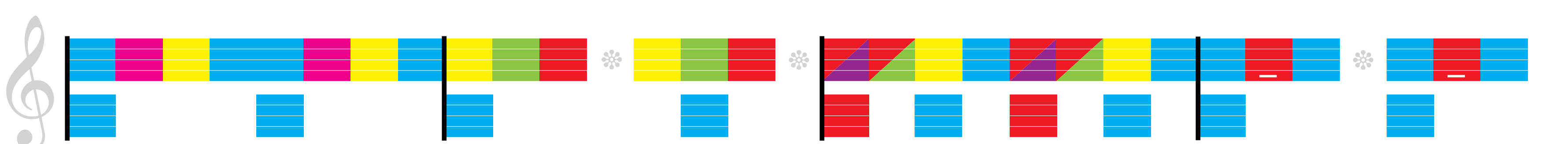
Febrero	
1	8 secuencias.
2	3.
3	1.
4	10.
7	6.
8	Bs. 1000.
9	13 años.
10	39 meses.
11	2.
14	24.
15	2 km.
16	10 %.
17	402 grupos.
18	78.
21	Bs. 96.
22	240 km.
23	Jueves.
24	Lunes.
25	16 alumnos.
28	25 %.

Marzo	
1	0.
2	750 números.
3	108 m^2.
4	Bs. 58,10.
9	13 carites.
10	54 cubos.
11	Bs. 120.
14	30 triángulos.
15	21 páginas.
16	7 paquetes.
18	35 %.
21	70 cm.
22	A.
23	30°.
24	11.
25	28.
28	4 años.
29	199.
30	9.
31	25 cm.

Abril	
1	0.
4	0.
5	33.
6	Bs. 8.
7	41.
8	3.
11	27.
12	4.
13	45 años.
14	13.
15	Bs. 4000.
25	Domingo.
26	37 años.
27	8 litros.
28	4.
29	44.

Mayo	
2	10 cm.
3	32 y 34.
4	Son iguales.
5	7.
9	1 m.
10	105.
11	10 días.
13	32 cm^2.
16	398, 400, 402, 404 y 406.
17	11:46 pm.
18	60 estudiantes.
19	0.
20	1 kg.
23	Bs. 9.
24	28 cuadernos.
25	144 cm^2.
26	12 plantas.
27	12 maneras diferentes.
30	Sí, posición 15.
31	2337.

Junio	
1	5.
2	10.
3	13 billetes.
6	Bs. 3,90.
7	15.
8	6.
9	27 balones.
13	16 cm.
14	13 motos.
15	3 hermanos.
17	2599.
20	9 autobuses.
21	444.
22	72.
23	8.
27	12 años.
28	40 %.
29	21.
30	24.



OJM

Soluciones Julio - Diciembre

Julio

4	3082.
6	50.
7	3.
8	12.
11	150.
12	80 m.
13	123.
14	140°.
18	1111.
19	$\frac{2}{15}$.
20	134 kg.
21	6.
22	Bs. 1650.
25	711040.
26	22.
27	44 %.
28	Bs. 4.
29	1006.

Agosto

1	18.
2	40.
3	5.
4	Darío.
5	196.
8	20 km.
9	118.
10	38 visitantes.
11	10000.
12	4 maneras.
15	50 años.
16	4 tanques.
17	820.
18	300 segundos.
19	11.
22	2184.
23	9.
24	6.
25	4.
26	8.
29	35°.
30	23.
31	4 bolas azules.

Septiembre

1	25 cm^2.
2	14.
5	9.
6	3.
7	72.
8	28.
9	$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$
12	5 triciclos.
13	3.
14	13.
15	120°
16	Benito.
19	18.
20	1.
21	11 cm.
22	9 h 15 min.
26	400 m^2.
27	10.
28	5.
29	8.
30	17.

Octubre

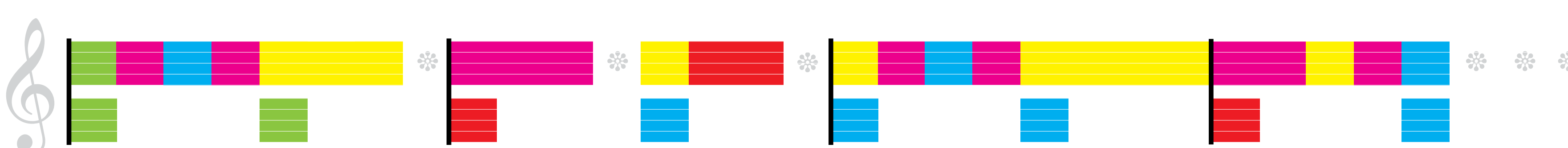
3	1 estudiante.
4	143 cm.
5	502.
6	1.
7	501.
10	15.
11	77.
13	Domingo.
14	3.
17	1.
18	(1,-2).
19	3.
20	14.
21	40320.
24	-2010.
25	1.
26	990.
27	2.
28	1.
31	16.

Noviembre

1	5461.
2	12 números.
3	Bs. 1540.
4	7.
7	$\frac{3}{5}$.
8	$\frac{810}{11}$ cm^2.
9	16 y 81.
10	99.
11	16 goles.
14	24, 32 y 40 unidades.
15	{2, 3, 4}.
16	125.
17	179.
18	2010, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2017.
21	60.
22	239 kg.
23	90 personas.
24	112.
25	$y = 0$.
28	$m = -1, m = 1$.
29	$x = -8$.
30	3999960.

Diciembre

1	$\frac{25}{8}$.
2	$x = 32$.
5	$D = 4$.
6	26.
7	8.
8	1806.
9	$(3, 5, 7)$.
12	$-\frac{1}{2}$.
13	556.
14	720.
15	936.
16	$(2, 9), (1, -2)$.
19	120°.
20	$14, 25, 36$ ó $-26, -15, -4$.
21	$\angle BDC = 140°$.
22	$x = 10^4, y = 10^2$.
23	$(11, 2), (6, 5), (1, 8)$.
26	3.
27	1 , 9 , 10 , 18.
28	345 cm.
29	30.
30	210 cm^2.



Asociación Venezolana
de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de
Matemáticas. Ofic. 331. Los Chaguaramos,
Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 0212 605.1512
E-mail: asomatemat8@gmail.com
www.acm.org.ve

fundación
EMPRESAS POLAR
RIF: J-00110574-3

FUNDECOM
Fundación para el Desarrollo
de Competencias Matemáticas

Olimpiada Recreativa de Matematica
http://olimpiadarecreativa.com

ASOCIACIÓN
MATEMÁTICA
VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS
FÍSICAS, MATEMÁTICAS
Y NATURALES

Depósito Legal CC259201043

Coordinación General
Rafael Sánchez Lamoneda

Coordinación Nacional ORM
Jorge Salazar

Recopilación y soluciones
Laura Vielma Herrero

Revisión académica
José Heber Nieto

Edición y diseño
Laura Vielma Herrero

Colaboraciones
Alexis Rodríguez
Carlos Shine
Douglas Jiménez
Fabiola Czwienczek
Gabriel Uribe
Ignacio Iribarren
Jorge Salazar
José Heber Nieto
Lisandro Alvarado
Luís Cáceres
Luis Echarry
Oscar Bernal

Diseño de portada
y montaje digital
Rogelio *Paco* Chovet

Fotolito e impresión
Litografía ImagenColor S.A.