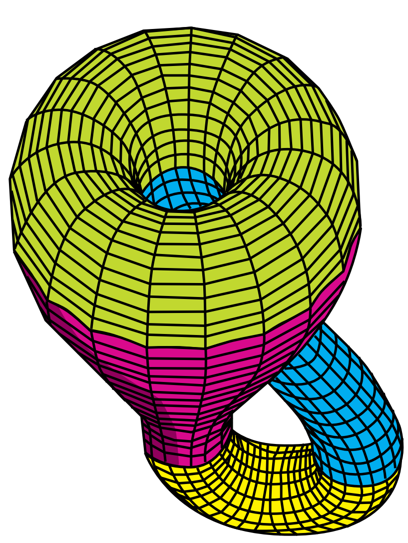
Una actividad de



Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331. Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 0212 605 1512.
E-mail: asomatemat8@gmail.com
www.acm.org.ve

FUNDECOM
Fundación para el Desarollo de Competencias

Olimpiada Recreativa de Matematica
http://olimpiadarecreativa.org

Con el patrocionio de

fundación Empresas Polar

Y el soporte académico de

Asociación Matemática Venezolana

Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales

Depósito Legal CC259200957

Coordinador General:
Rafael Sánchez Lamoneda

Coordinador Nacional ORM:
Jorge Salazar

Recopilación y Soluciones:
Laura Vielma Herrero

Revisión Académica:
Jose Heber Nieto
Luis Gómez Sanchez A.

Edición y Diseño:
Laura Vielma Herrero

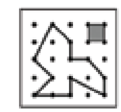
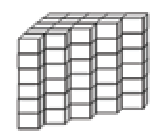
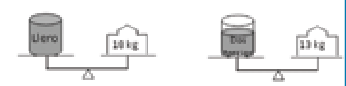
Colaboradores:
Amílcar Pérez
Carlos Di Prisco
Darío Durán
Diómedes Bárcenas
Héctor Chang
Ignacio Iribarren
Julián Rojas
Luís Cáceres
Lisandro Alvarado
Óscar Bernal
Walter Beyer

Diseño de portada y montaje digital:
Rogelio *Paco* Chovet

Fotolito e Impresión:
Litografía ImagenColor S.A.

ORM

ENERO 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				1 *El gran libro de la naturaleza está escrito en símbolos matemáticos* **Galileo Galilei**
4 Observa las dos balanzas en equilibrio:  ¿Cuántos cubos equilibran un cilindro?	**5** Pedro tarda 15 segundos en cortar un trozo de madera en cuatro partes. En las mismas condiciones, ¿cuánto tarda Pedro en cortar un trozo igual de madera en tres partes?	**6** ¿Cuántos números de tres dígitos distintos, mayores que 150, puedes formar con los dígitos 1, 3 y 5?	**7** El 200 % del 50 % de 1.000 es:	**8** En el geoplano, la unidad de medida de superficie es el cuadrado sombreado. Calcula el área de la región limitada por la liga. 
11 Diez kilogramos de café se empaquetan en bolsas de kilo y cuarto. Cada bolsa se vende en BsF. 1,50. Si se vendió todo el café, ¿cuánto se recaudó?	**13** Pedro confesó a sus amigos: "Si yo hubiera recogido el doble de manzanas de las que recogí, tendría 24 manzanas más de las que tengo"¿Cuántas manzanas recogió Pedro?	**14** Gasté dos tercios de mi dinero en comida y tres quintos del resto en refresco. Si me quedan BsF. 12, ¿cuántos tenía al principio?	**15** El cuerpo macizo está formado de cubos iguales. ¿Cuántos cubos tiene el cuerpo? 	**16** *Patrones en la naturaleza* 
19 Las aristas de un cubo miden 8 cm. Si se quiere colocar una cinta de color a todas las aristas, ¿cuántos metros de cinta se necesitan?	**20** En un colegio hay 1.350 alumnos y dos quintos de ellos son hembras. ¿Cuántos varones hay en el colegio?	**21** El pequeño Miguel tiene tres y medio años. Su hermanita tiene un cuarto de año de edad. ¿Cuántos meses le lleva Miguel a su hermanita?	**22** Considera todos los números naturales de dos dígitos tales que la suma de sus dígitos sea 11. Si a cada uno de esos números le sumas 4, ¿cuántos de ellos son divisibles por 4?	**23** Observa las balanzas:  ¿Cuánto pesa el envase vacío?
26 Pedro tiene una pelota de goma muy especial: cada vez que cae desde una cierta altura rebota un medio de esa altura. Si se deja caer desde una altura de 32 cm, ¿qué distancia ha recorrido la pelota al tocar el suelo por cuarta vez, desde el momento que se dejó caer?	**27** La suma 0 + 1 + 2 + 3 + 4 - 3 - 2 - 1 - 0 es igual a:	**28** Sofía dibuja una secuencia de canguros así: uno azul, uno verde, uno rojo, uno negro, uno amarillo, uno azul, uno verde, uno rojo, uno negro, y así sucesivamente. ¿De qué color es el décimo séptimo canguro de la secuencia?	**29** En la biblioteca hay 6 mesas con 4 sillas cada una, 4 mesas con 2 sillas cada una y 3 mesas con 6 sillas cada una. ¿Cuántas sillas hay en total?	**30** En la recta, $AC = 10$ m, $BD = 15$m y $AD = 22$ m. Calcula BC.

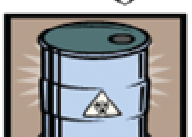
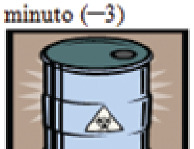
Dos modelos para la regla de los signos en la multiplicación de enteros

Como los números enteros contienen a los naturales, es de esperar que la multiplicación de los enteros positivos (y el cero) siga las mismas reglas que la de los números naturales. En cuyo caso, como el producto de dos números naturales es un número natural, el producto de dos enteros positivos debe ser un entero positivo. Pero ¿cuál es el producto de dos números negativos? ¿cuál es el producto de dos enteros si uno de ellos es positivo y el otro es negativo? Se abordan aquí todos los casos posibles, para ello usaremos dos modelos concretos: uno, basado en el llenado y vaciado de un tanque de agua en un tiempo determinado. El otro, basado en las temperaturas que suben o bajan en tiempos determinados.

I. Para el **modelo del tanque** asumiremos los siguientes convenios:

1. a) El agua que **fluye dentro** del tanque se representa con **números positivos** y el agua que *fluye fuera* del tanque con *números negativos*.
2. b) El tiempo en **futuro** se representa mediante un **número positivo** y el tiempo en *pasado* mediante *enteros negativos*.
3. c) No fluye agua dentro y fuera del tanque simultáneamente.

Ilustramos la situación en el siguiente cuadro:

Supongamos que el agua fluye dentro del tanque a razón de 4 litros por minuto (4): 4 por minuto ⇩ 	1. Dentro de 2 minutos (2) habrá 8 litros más en el tanque, es decir $2 . 4 = 8$ *(el producto es positivo)*	1 Un número positivo por uno positivo da positivo: $(+) . (+) = (+)$
	2. Hace 5 minutos (-5) había 20 litros menos (-20) en el tanque, es decir $(-5). 4 = -20$ *(el producto es negativo)*	2. Un número negativo por uno positivo da negativo: $(-) . (+) = (-)$
Ahora supongamos que el agua fluye fuera del tanque a razón de 3 litros por minuto (-3)  ⇩ 3 por minuto	3. Dentro de 7 minutos (7) habrá 21 litros menos (-21) en el tanque, es decir $7 . (-3) = (-21)$ *(el producto es negativo)*	3. Un número positivo por uno negativo da negativo $(+).(-) = (-)$
	4. Hace 2 minutos (-2), había 6 litros más (6) en el tanque, es decir $(-2) . (-3) = 6$ *(el producto es positivo)*	4.Un número negativo por uno negativo da positivo: $(-).(-) = (+)$

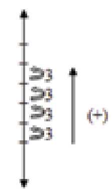
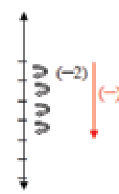
Así, hemos obtenido la regla de los signos para la multiplicación.
Si agrupamos las reglas 1 y 4, por un lado y las reglas 2 y 3 por otro, podemos abreviar los resultados de la siguiente manera:

El producto de dos números enteros de ***igual signo*** es un entero ***positivo.***
$(+) \cdot (+) = (+)$ $\qquad$ $(-) \cdot (-) = (+)$
El producto de dos números enteros de ***distinto signo*** es un entero ***negativo***
$(+) \cdot (+) = (+)$ $\qquad$ $(-) \cdot (-) = (+)$

II. Para el **modelo de temperaturas** convenimos en que:

1. Las temperaturas que **suben** son representadas por **enteros positivos** y las temperaturas que *bajan* son representadas por *enteros negativos*.
2. El tiempo **futuro** es representado por **números positivos** y el tiempo *pasado* mediante *enteros negativos*.

Ilustramos la situación en el siguiente cuadro:

Supongamos que la temperatura ***sube*** 3° cada hora 	1) Dentro de 4 horas (4) habrá aumentado 12°, es decir $4 \cdot 3 = 12$	1) un número positivo por uno positivo da positivo: $(+) \cdot (+) = (+)$
	2) Hace 5 horas (-5) había 15° menos, es decir $(-5) . 3 = -15$	2) un número negativo por uno positivo da negativo: $(-) \cdot (+) = (-)$
Supongamos que la temperatura ***baja*** 2° por hora: 	3) Dentro de 6 horas (6) habrá 12° menos, es decir: $6 \cdot (-2) = -12$	3) un número positivo por uno negativo da negativo: $(+) \cdot (-) = (-)$
	4) Hace 7 horas (-7) había 14° más, es decir $(-7) \cdot (-2) = 14$	4) un número negativo por otro número negativo da un positivo $(-) \cdot (-) = (+)$

Con este modelo obtenemos también la regla de los signos para la multiplicación de enteros:

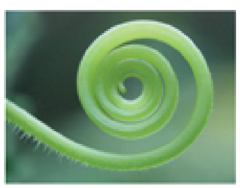
El producto de dos números enteros de ***igual signo*** es un entero ***positivo.***
$(+) \cdot (+) = (+)$ $\qquad$ $(-) \cdot (-) = (+)$
El producto de dos números enteros de ***distinto signo*** es un entero ***negativo***
$(+) \cdot (-) = (-)$ $\qquad$ $(-) \cdot (+) = (-)$

La existencia de cada modelo es una argumentación que respalda la consistencia de las reglas del producto de números enteros.

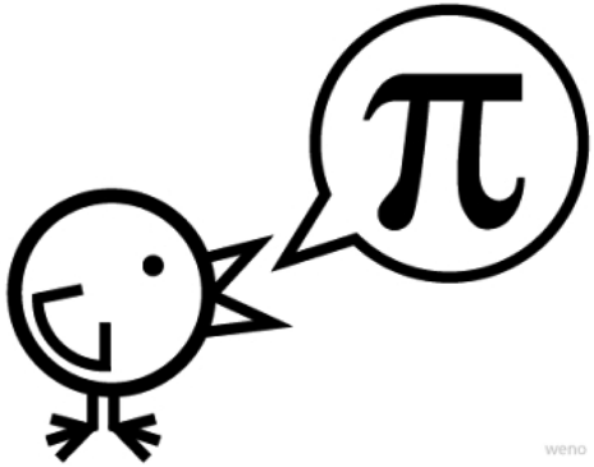
Julián Rojas Jiménez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico de Maracay

ORM

FEBRERO 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 Tina vio en un estante de la biblioteca que todos los libros se encontraban enumerados 1, 3, 5, 7, ..., 49. (todos los números impares del 1 al 49). ¿Cuántos libros había en el estante?	**2** Una máquina tiene la particularidad de modificar el número que recibe de entrada dividiéndolo primero entre 6 y luego multiplicándolo por 9. Si el número de entrada es 306, ¿qué número sale de la máquina?	**3** Leo toma la edad de su padre, la divide en dos y le resta 9 años obteniendo como resultado 25 años. ¿Qué edad tiene el padre de Leo?	**4** ¿Qué número falta en la operación: $2000 + \quad = 1001 + 1007$?	**5** El resultado de $5 + 4 - 3 \cdot 2 \div 1$ es:
8 El precio de la entrada de un adulto al zoológico es 4 BsF mientras que la entrada de un niño es 1,50 BsF más barata. ¿Cuánto pagará por las entradas un padre con dos hijos?	**9** Se escribieron todos los números del 1 al 20 en una pizarra. Alicia subrayó todos los múltiplos de 2 y Beatriz subrayó todos los múltiplos de 3. ¿Cuántos números fueron subrayados dos veces?	**10** El número que falta en la operación $2008 - 208 = 28 + \quad$ es:	**11** Una caja tiene 30 metras y pesa 650 gramos. Con 10 metras más, la caja pesa 800 gramos. ¿Cuántos gramos pesa la caja vacía?	**12** Se colorean las casillas de un tablero 9×9 de una manera muy especial. Se utilizan seis colores en un orden fijo: negro, blanco, rojo, verde, rosado, marrón, negro, blanco, ... ¿De qué color será el último espacio?
15 *Una espiral logarítmica en la naturaleza* 	**16** *Geometría fractal en un vegetal* 	**17** Las manzanas cuestan más que las naranjas. Los melones cuestan más que las naranjas pero menos que las manzanas. Los mangos cuestan más que las naranjas pero menos que los melones. Las peras cuestan más que los melones pero menos que las manzanas. ¿Qué fruta es la más cara?	**18** Multiplicando el 40 % de 2 por el 60 % de 2, ¿se obtiene cuánto por ciento de 2?	**19** Pedro tiene 8 cubos, Juan tiene 12 cubos, David tiene 16 cubos, y Nicolás tiene 20 cubos. ¿Cuál de los cuatro niños puede usar todos sus cubos para construir un cubo grande?
22 Luis tiene cubos de arista 5 cm cada uno. Él quiere formar un marco cuadrado alrededor de un cuadrado de tamaño $30cm \times 30cm$. ¿Cuántos cubos necesitará para lograrlo?	**23** A Juana le gusta multiplicar por tres, a Patricia le gusta sumar 2 y a Nadia le gusta restar 1. ¿En qué orden deberían intervenir las tres para convertir el 3 en 14?	**24** ¿Cuál es la tercera parte de la mitad de un cuarto de 24?	**25** Gaby es más alta que Aarón pero más baja que Tomás. Irene es más alta que Kathy pero más baja que Gaby. ¿Quién es la persona más alta del grupo?	**26** Elena lee un libro que contiene 60 páginas. Le toma 5 minutos leer una página. Cada día Elena lee este libro por media hora. ¿En cuántos días terminará Elena de leer este libro?

Una fórmula sobre π



El número π (pi, decimosexta letra del alfabeto griego) es según muchos el número más extraordinario que existe, y la historia de este número abunda en anécdotas y tópicos llamativos e interesantes. Todos conocen el significado geométrico de π como siendo el cociente constante $L/2r = A/r^2$ en toda circunferencia de radio r, longitud L y área encerrada A, pero no todos saben que, por ejemplo, en la antigua India (hacia los 800-500 A. C.) se usaban dos constantes diferentes, 3,2 para $L/2r$ y 3,088 para A/r^2. Eran signos de sus tiempos más que de ciencia defectuosa de los hindúes, quienes entre otros importantes aportes fueron creadores de la valiosísima **posición decimal del cero**, clave de la simplificación notable que se logró para las operaciones elementales de la aritmética que se efectuaban muy arduamente en el pasado (intente el lector multiplicar 334 por 78 usando números romanos...).

La importancia de π en campos muy diferentes de la geometría es en la actualidad patente para los matemáticos. A modo de simple presentación y sin detalles técnicos, exponemos aquí algo sobre π cuyo interés es a lo menos triple: es un importante descubrimiento contemporáneo, es muy impactante por su carácter imprevisto y tiene muchas consecuencias teóricas en el mundo de la Matemática en nuestros días. Podríamos agregar que es en sí sumamente interesante, y también bello para quienes aman estas cosas.

Considerado π como un número irracional, al igual que como para $\sqrt{2}$ por ejemplo, no es posible como sabemos conocer aproximaciones de su infinito desarrollo decimal sin cálculos explícitos; no hay ley de formación de las cifras que sucesivamente aparecen y hay que calcular éstas por separado para conocerlas. Durante siglos se ha creído que era imposible calcular una cualquiera de dichas cifras sin conocer todas las que le preceden pero no es así, tal creencia había sido errónea.

La fórmula

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \left(\frac{1}{16} \right)^n$$

data de 1995 y se debe al canadiense Simon Plouffe. Asombrosamente, con esta reciente fórmula se puede calcular, en base 16, cualquier dígito del desarrollo decimal de π sin conocer los que le preceden. En un trabajo conjunto con Bailey y Borwein, que ha sido calificado como *totally mind-blowing*, Plouffe inauguró el estudio de las así llamadas -en honor de él y sus dos colaboradores- fórmulas BBP, las cuales son de la forma

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(k)}{b^k q(k)}$$

donde $p(k)$ y $q(k)$ son polinomios a coeficientes enteros en la variable entera k. Más precisamente, estas fórmulas se llaman de tipo BBP, base b, y existen ya bastantes -y habrán más- que prometen maravillas en el cálculo de irracionales. El mismo Plouffe extendió su mencionado trabajo a cualquier base en 1997, incluida nuestra base decimal, pero a diferencia del bajo costo en tiempo de computación para la base 16, no sucede lo mismo para nuestra base 10 en que el costo es alto y por ello poco práctico.

En la fórmula dada para π, se tiene $b = 16$, la variable k recorre todos los enteros $n \geq 0$, y los polinomios p y q corresponden respectivamente al numerador y denominador de la función racional en n que se obtiene al sumar los cuatro términos dados entre paréntesis. Por aclarar ideas, veamos que el desarrollo de 19 cifras decimales exactas $\pi \cong 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 2384$ es una aproximación igual a la suma

$$3 + 1\left(\frac{1}{10}\right) + 4\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots\cdots\cdots + 8\left(\frac{1}{10}\right)^{18} + 4\left(\frac{1}{10}\right)^{19}$$

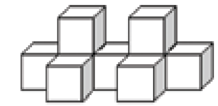
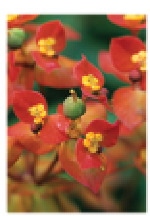
porque se sobreentiende que tal aproximación está dada en base 10. Así la cifra de posición decimal n-ésima en el desarrollo completo de π correspondería al coeficiente de $1/10^n$. Esto nos aclara lo del factor b^k en el denominador. Pero para descubrir una fórmula BBP, base 10, hay que hallar los polinomios adecuados y eso se adivina sumamente difícil.

Luis Gómez Sánchez A.

Departamento de Matemáticas.
Universidad de Oriente.

ORM

MARZO 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 Ana se durmió a las 9:30 p.m. y despertó a las 6:45 a.m. Su hermano Antonio durmió 1 hora 50 minutos más que ella. ¿Cuánto tiempo durmió Antonio?	**2** A Beatriz le gusta calcular la suma de los dígitos que ella ve en su reloj digital (por ejemplo, si el reloj muestra 21:17, entonces Beatriz obtiene 11). ¿Cuál es la mayor suma que ella puede obtener?	**3** José quiere comprar pelotas de básquet. Si él comprara cinco pelotas, le quedarían 10 bolívares. Si quisiera comprar siete pelotas, quedaría debiendo 22 bolívares. ¿Cuánto cuesta una pelota de básquet?	**4** ¿Cuántas páginas tiene un libro si para numerar todas sus páginas se necesitan 35 dígitos en total?	**5** La construcción pesa 189 g. ¿Cuánto pesa cada cubo? 
8 ¿Cuántos números enteros hay en el intervalo de 2,09 a 15,3?	**9** Benito tiene 20 pelotas de diferentes colores: amarillas, verdes, azules y negras. 17 de las pelotas no son verdes, 5 son negras, 12 no son amarillas. ¿Cuántas pelotas azules tiene Benito?	**10** Transcurren 2003 minutos después de las 20:03 del día 20/03/2003 ¿Qué fecha es?	**11** Hay 17 árboles desde la casa de Juan a su colegio. Juan marca algunos árboles con una cinta roja de la siguiente manera: en su ida al colegio marca el primero y luego cada dos y en su regreso del colegio, marca el primero y luego cada tres. ¿Cuántos árboles quedan sin marcar?	**12** Tienes seis barras de longitudes 1 cm, 2 cm, 3 cm, 2001 cm, 2002 cm y 2003 cm. ¿Cuántos triángulos diferentes puedes construir con esas barras?
15 Hay 5 loros en una jaula. El costo promedio es de 60 bolívares. Un día se escapa un loro y entonces el costo promedio de los 4 loros que quedaron es de 50 bolívares. ¿Cuántos bolívares era el precio del loro que se escapó?	**16** Sólo tienes monedas de Bs. 50 y monedas de Bs. 20 para pagar una deuda de Bs. 120. ¿De cuántas maneras diferentes puedes hacerlo?	**17** Si caminas 2 kilómetros hacia el norte, 3 kilómetros hacia el este, 4 kilómetros hacia el sur, 5 kilómetros hacia el oeste y 2 kilómetros hacia el norte, ¿a cuántos kilómetros estás del punto de partida?	**18** *Canguro Matemático* 	**19** Cuando escribes los números desde el 10 hasta el 40, ¿cuántas veces utilizas el dígito 3?
22 Observa la secuencia de números: $28, 21, 14, 7, \ldots$ ¿Cuál número sigue?	**23** María y Julia tienen igual cantidad de dinero. ¿Cuántos bolívares le debe dar María a Julia para que esta última tenga Bs. 400 más que María?	**24** Un tercio de la mitad de un número es 4. ¿Cuál es el número?	**25** María gasta dos tercios de su dinero en ropa y dos tercios del resto en comida. Si le quedan Bs. 400, ¿cuánto tenía al principio?	**26** ¿Cuántos números de tres dígitos tienen 3 como suma de sus dígitos?
29 *Siguiendo la sucesión de Fibonacci en los pétalos de las flores* 	**30** *Euphorbia de dos pétalos* 	**31** *Trillium de tres pétalos* 		

Matemáticas y vida exterior

Mensaje binario enviado al espacio desde el radiotelescopio de Arecibo (Puerto Rico) en 1974

La Matemática comúnmente ha sido considerada como una ciencia exacta y más allá de la mencionada exactitud del Cálculo, la Matemática ha sido una ciencia de confiar en sus métodos y procedimientos desde el simple hecho de determinar el sabor de una taza de té cuando se añade primero la leche y después el té o viceversa, como amenamente lo expusiera en el Calendario Matemático 2008 nuestra colega Alejandra Cabaña, hasta la pretensión de mostrar a posibles habitantes del mundo exterior la existencia de vida inteligente en el planeta Tierra; y no estamos aludiendo a la matemática sofisticada que se usa en la Astrofísica actual, sino a las elementales como el Teorema de Pitágoras. La credibilidad en la exactitud matemática trasciende cualquier ámbito social y sus conclusiones permanecen incólumes tanto en el espacio como en el tiempo.

Cuenta Vitruvio en Los Diez Libros de la Arquitectura que el filósofo socrático Aristipo, habiendo naufragado, se consoló a sí mismo al observar en la arena de la playa donde desembarcó una variedad de figuras geométricas, hecho del que dedujo la presencia de una civilización en aquel lugar. Mas no sólo se ha usado la matemática para deducir la presencia de una cultura en una determinada isla griega, sino para investigar la presencia de vida inteligente en el mundo exterior.

Al parecer somos los únicos habitantes del sistema solar, pero durante siglos hubo fuertes sospechas de vida inteligente en otros planetas especialmente en Marte; sospechas que llegaron a costar la vida de algunos como sucedió con el filósofo Giordano Bruno, quien murió en el año 1600, quemado vivo por la Inquisición, por predicar estas creencias.

Las sospechas de vida inteligente en el planeta Marte se fortalecieron en el siglo XIX y ante ellas se idearon experimentos con miras a establecer puentes de comunicación entra marcianos y terrícolas, los cuales incluían ideas matemáticas elementales, conocidas desde los tiempos de los antiguos griegos, partiendo de la premisa de que cualquier conocimiento matemático adquirido por una determinada civilización, debería también ser adquirido por cualquier otra con un grado de desarrollo similar, los terrícolas, en la persona de Francis Galton (1822- 1911) propusieron un código de comunicación consistente de puntos, líneas rectas y líneas oblícuas que representarían los números, para luego transmitir cálculos astronómicos relacionados con el sistema solar. Se esperaba que una vez que los marcianos hubiesen entendido nuestros mensajes y asimilado la noción de radio, nos responderían con un valor aproximado del número Π.

Por otra parte, de acuerdo con Wolfgan Blum ([1]), el afán en el siglo XIX de comunicarse con los marcianos condujo a proponer en la Tierra el cultivo de extensos territorios que ilustrasen el contenido geométrico del Teorema de Pitágoras, pues de existir vida inteligente en Marte, tendrían que conocer este teorema y deducirían a su vez la existencia de vida inteligente en la Tierra.

Lo que no nos dice Blum es de quién es la autoría de esa idea tan interesante.

La siguiente bibliografía fue muy útil en la preparación de este breve ensayo.

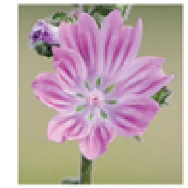
[1] W. Blum, Matemáticas, Cómo y Porqué, Altea, México , 2004.

[2] G. Bruno, Sobre el Infinito Universo y los Mundos, Orbis, Barcelona, 1984.
[3] A. Cabaña, Una Buena Taza de Té, Calendario Matemático, ACM, 2008.
[4] L. García del Cid, La Sonrisa de Pitágoras, Ramdom Mondadori, S.A., Barcelona, 2006.
[5] Vitruvio, The Ten books on Architecture, Dover Publications, New York, 1960.

Diomedes Bárcenas

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
ULA Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela

ABRIL 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			1 *Columbina de cinco pétalos* 	**2** *Rareza Malva de ocho pétalos* 
5 Una máquina tiene la particularidad de modificar el número que recibe de entrada duplicándolo primero y luego sumándole 3 al resultado. Si el número de salida es 115, ¿qué número entró a la máquina?	**6** El 10 % del 10 % de un número es 2. ¿Cuál es el número?	**7** ¿Cuántos números de tres cifras tienen 6 como producto de sus dígitos?	**8** Iván multiplica un número por 5. A la respuesta se le suma el cociente de la división de 903 entre 7. El resultado es 924. ¿Con qué número comenzó Iván la operación?	**9** Un edificio tiene 16 pisos, cada piso tiene 6 apartamentos y cada apartamento tiene 9 ventanas. ¿Cuántas ventanas hay en todo el edificio?
12 A dos amigos les gusta jugar tenis y determinan que para que uno gane, debe ganar 4 veces en total. El partido no puede terminar en empate, ¿cuál es el máximo número de juegos que pueden llegar a jugar hasta que uno gane?	**13** A Pedro se le pidió que redondeara a las centenas el número 7394.Por error, él redondeó a los miles. ¿Por cuánto fue su resultado diferente del resultado correcto?	**14** Una mesa circular tiene 60 sillas. n personas están sentadas en la mesa de tal forma que cualquier nueva persona en sentarse se sienta necesariamente al lado de alguien. ¿Cuál es el valor más pequeño de n?	**15** Cuando en Zurich son las 18:00 horas en Los Ángeles son las 09:00. Un avión sale de Zurich a las 13:05. Si la duración del vuelo es de 12 horas y 30 minutos, ¿a qué hora local llegará el avión a Los Ángeles?	**16** 2 litros de sopa se cocinan utilizando 15 gramos de sal. ¿Cuánta sal habrá en cada plato si se sirven 400 cc de sopa en cada uno?
19 *Margarita de trece pétalos* 	**20** Justo ahora un Canguro joven tiene exactamente 4 años, 29 días y 3 horas de nacido. ¿Cuál es su edad en horas?	**21** Samuel tiene que estar en el colegio a las 7:00am. Le toma 45 minutos estar listo para salir de su casa y 35 minutos llegar al colegio. ¿A qué hora debe despertarse para llegar justo a tiempo?	**22** Liliana construyó una lista con todos los números enteros del 1 al 20. ¿Cuántas veces escribió el dígito 1?	**23** Desde 2009, ¿cuál es el primer año que es un número primo?
26 Juntos, Tamara y Daniel tienen 20 lápices. Cuando Daniel le dio a Tamara 4 de los suyos y Tamara le dio 2 de los de ella a Daniel, ambos quedaron con el mismo número de lápices. ¿Cuántos lápices tenía Tamara antes de comenzar el intercambio?	**27** A Laura le toma 14 minutos leer una página de un libro. Ayer, a las 3:40 pm, ella comenzó a leer un cuento de 10 páginas. ¿Cuando terminó de leer el cuento si en la mitad de su lectura se tomó 15 minutos de descanso para merendar?	**28** Una cesta tiene la misma cantidad de pelotas blancas que rojas. Luis saca una pelota blanca y dos rojas. Ahora la cantidad de pelotas blancas en la cesta es el doble de las rojas. ¿Cuántas pelotas había en la cesta al comienzo?	**29** Mi madre nació un domingo y mi padre 25 días antes. ¿En qué día de la semana nació mi padre?	**30** María dibujó figuras geométricas: triángulos y cuadriláteros, sin vértices en común. Ella contó 11 vertices al considerar todas las figuras. ¿Cuántos triángulos dibujó?

El radio de la Tierra

La tierra es redonda, aunque no es una esfera pefecta pues está ligeramente achatada en los polos y su superficie no es lisa, tiene montañas y hendiduras profundas, pero si ignoramos esas irregularidades superficiales, se aproxima más a un elipsoide de revolución: el cuerpo que genera una elipse (casi una circunferencia en este caso) al girar en torno a su eje menor. El nombre más generalizado que se aplica a la forma de la tierra es el de *geoide*.

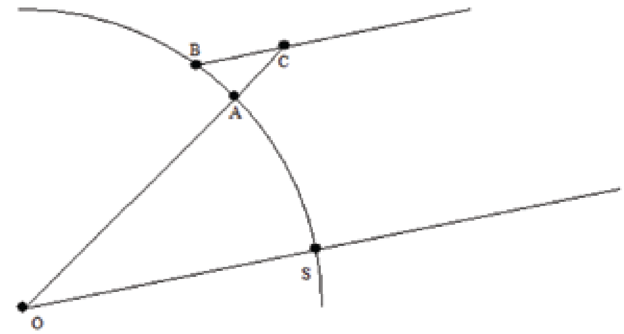
No podemos pues referirnos estrictamente al *radio* de la tierra. La distancia de un punto de la superficie al centro del geoide varía, según la localidad de ese punto. Con el auxilio de sofisticados instrumentos, hoy día ese radio inconstante se puede medir con enorme precisión en cualquier lugar de la superficie terrestre. Podemos hablar, de todos modos, de un *radio promedio*, que en verdad no difiere demasiado del *radio* medido desde cualquier punto.

Los antiguos griegos concebían la tierra como esférica. Se cree que el primero en adelantar esta tesis fue el filósofo pre-socrático Demócrito (460-370 AC), el mismo que afirmó que la materia estaba compuesta por átomos. Éstas y otras ideas, rescatadas y aceptadas por la ciencia moderna, fueron desechadas, más que todo ignoradas, durante la Edad Media, cuando prevaleció una interpretación literal de las Sagradas Escrituras. Aún entrado el siglo XVI, era un tanto excéntrico, acaso herético, sostener que la tierra era redonda, como lo creían Cristobal Colón y otros hombres ilustrados de su tiempo.

Con la convicción de una tierra esférica, el primero en medir su radio fue Eratóstenes (276-194 AC), matemático, filósofo, y amigo de Arquímedes. Era un griego nacido en Cirene (hoy Libia), parte del imperio de cultura griega que dejó Alejandro Magno y del cual formaba parte Egipto, con su capital Alejandría.

El experimento de Eratóstenes es de una extraordinaria sencillez y una genial aplicación de la geometría más elemental.

Eratóstenes había observado que en la ciudad de Siene (hoy Aswan en Egipto) existía un pozo profundo en cuyo fondo de agua el sol se reflejaba precisamente a las 12 del mediodía en el solsticio de verano (cierto día entre el 20 y el 23 de junio de cada año). Esto significa que el rayo de luz solar que entra en el pozo está en linea recta con el centro de la tierra: la recta SO, donde S es la boca (un punto) del pozo y O el centro de la tierra.



En Alejandría, a 787 Km (en la época se medía en 'estadios') al norte exacto (casi) de Siene, había una torre perfectamente vertical CA, de modo que la recta CA pasa por el centro O. El rayo solar CB que pasa por el tope C de la torre es paralelo al SO, por la inmensa distancia del sol, y la torre arroja una sombra AB.
La clave del experimento de Eratóstenes era medir, a la hora precisa de las 12 del día del solsticio de verano, la longitud de la sombra AB. La altura AC de la torre era conocida. Es importante que el punto A se encuentre exactamente al norte de S, con objeto de que el triángulo ABC esté en el mismo plano determinado por los radios OS y OA, cosa que Eratóstenes tenía presente.
Ahora bien, como la recta OC corta las paralelas OS y BC, un teorema geométrico harto conocido afirma que el ángulo SOA es igual al ángulo OCB; designémoslo por λ.
El triángulo ABC puede considerarse rectángulo en A, gracias a su ínfimo tamaño relativo, de modo que $tan\lambda = AB/CA$ y el ángulo es calculable mediante $\lambda = \arctan AB/CA$.
Si λ está expresado en radianes, sabemos (como sabía Eratóstenes) que la longitud del arco $SA(= 787 \text{ Km})$ es $\mathbf{R}\lambda$, donde $\mathbf{R} = OS = OA$ es el radio de la tierra.
Eratóstenes obtuvo la medida de $\lambda = 7,2° = 0,1257$ radianes. Luego, $\mathbf{R} = (787 \div 0,1257)$ Km = 6.261 Km.
Es preciso rendir tributo al genio de Eratóstenes por su cálculo de asombrosa aproximación a las estimaciones modernas que arrojan un radio promedio de unos 6.300 Km.
El joven lector puede bien repetir la medición de Eratóstenes clavando verticalmente, con ayuda de una plomada, una viga recta de hierro en un punto S de su geografía. A una distancia en dirección precisa norte o sur, no menor de unos 800 Km, clava otra viga vertical en un punto A y de altura AC. Cuando la viga en S no da sombra, avisa al instante a su compañero en A (¿e-mail? ¿teléfono?) para que mida la sombra AB. Ya sabe qué hacer para calcular $\mathbf{R}$.

Ignacio L. Iribarren

Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales y Universidad Simón Bolívar.

ORM

MAYO 2010

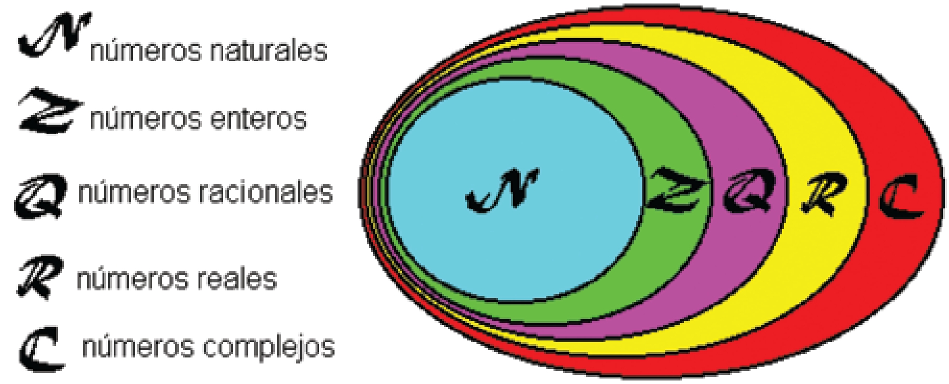
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 En una clase todos los varones le dan la mano a las niñas para saludarlas. Se dieron 77 saludos. ¿Cuántos varones hay en la clase?	**4** En cada uno de los tres meses de verano (julio, agosto, septiembre), María escogió el primer lunes de cada mes para recordar algunos temas matemáticos. Luego sumó las tres fechas de esos tres lunes. ¿Cuál es la menor suma que pudo haber obtenido?	**5** Un canguro nota que cada diciembre aumenta 5 kilos mientras que en agosto pierde 4. En el resto del año mantiene un peso estable.El 20 de marzo de 2009 pesaba 100Kg. ¿Cuánto pesaba el primero de octubre de 2001?	**6** Mi mamá me da cinco besos cada día. 8 años son 2922 días y 2 años más son 730 días. ¿Cuántos besos me ha dado en 10 años?	**7** Un centro de atención registró 24 llamadas cada año desde 1997. ¿Cuántas llamadas se han registrado si se incluyen todas las del año 2009?
10 Los dos signos representan dígitos distintos. $\spadesuit + \spadesuit + \spadesuit + \spadesuit = \clubsuit\heartsuit$ $\heartsuit + \heartsuit + \heartsuit + \heartsuit = \spadesuit$ $\spadesuit = ?$	**11** El reloj digital de Luis está defectuoso: algunas veces muestra el dígito 0 en vez del 8 y viceversa. Cuando Luis mira su reloj, observa que son las 20:08. ¿En cuántos momentos puede ver Luis esta combinación de números debido al defecto del reloj?	**12** Carlos escribe cada uno de los números 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53 y 68 en una tarjeta distinta. ¿Cuál es el menor número de tarjetas que debe seleccionar para que sus números sumen 100?	**13** Un trozo de papel es cortado en tres pedazos. Uno de los pedazos es cortado en tres pedazos más pequeños. Si se efectúa este procedimiento 7 veces, ¿cuántas piezas de papel se tendrán?	**14** Iván, Juan y Víctor son tres profesores de matemáticas. Iván y Víctor suman 117 en sus edades. Víctor y Juan suman 96 e Iván y Juan suman 105. ¿Qué edad tiene Víctor?
17 ¿Cuál es el resultado de $5 + 10 + 15 + \ldots + 95 + 100$?	**18** ¿Por cuántas veces es mayor el número de dedos que el número de manos de una persona?	**19** En una caja de dulces hay chocolates, caramelos y chicles sumando 20 en total. Hay 4 veces más chocolates que caramelos pero hay menos chicles que chocolates. ¿Cuántos caramelos hay en la caja?	**20** Un cubo de madera de 11 cm de lado se obtiene pegando 11^3 cubitos de 1 cm de lado. ¿Cuál es el máximo número de estos cubitos que pueden ser vistos simultáneamente?	**21** Si la suma de los números pares desde el 2 hasta el 200 es 10100, entonces la suma de los números impares desde el 1 hasta el 199 es:
24 ¿Cuántos números de dos dígitos hay en los cuales el dígito de las decenas es mayor que el de las unidades?	**25** Cuando cuentan del 1 al 100, dos amigos aplauden cada vez que cuentan un múltiplo de 3 o un número con el dígito 3 en las unidades. ¿Cuántas veces aplaudieron?	**26** Carla es 5 veces mayor que su hermana. En seis años, Carla le doblará la edad a la hermana. ¿Qué edad tendrá Carla en 10 años?	**27** John se quedó dormido a las 20:30 ayer en la noche. Esta mañana se despertó a las 06:15. ¿Cuánto tiempo durmió John?	**28** ¿Cuál es el valor de * en la siguiente multiplicación? $\begin{array}{r} 536 \\ \underline{\times \quad *} \\ 3{*}52 \end{array}$
31 ¿Qué operación o número debe reemplazar $\spadesuit$ para que la ecuación $1 + 1\spadesuit 1 - 2 = 100$ tenga sentido?				

Sobre el Teorema Fundamental del Álgebra

Es posible dar una explicación casi completamente algebraica de la evolución del concepto de número, partiendo de los números naturales hasta llegar al conjunto de los números complejos; y entender, gracias al Teorema Fundamental del Álgebra, por qué esta evolución, en algún sentido se detiene en los complejos.

Los numeros naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ se originaron de la necesidad de contar. Y la necesidad de hacer mediciones está ligada al origen de los racionales positivos. No obstante, las extensiones de $\mathbb{N}$ a los enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ y de éstos a los racionales $\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ pueden explicarse considerando la solución a una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$. Si $a = 1$ y b, c son naturales con $b > c$, la solución es un entero negativo o cero. Y si a no es cero ni uno, $b = 0$ y c es un entero no múltiplo de a, la solución es un racional no entero. Incluso si a, b y c son racionales con $a \neq 0$, la solución de la ecuación $ax + b = c$ es de nuevo racional.

La extensión de los racionales a los reales está ligada a ecuaciones no lineales como $x^2 - 2 = 0$, cuya raíz positiva, descubierta por los pitagóricos, es precisamente la longitud de la hipotenusa de un cuadrado de lado 1. En general la ecuación $x^n = a$, con $n \geq 2$ natural y $a > 0$ un racional que no es la n-ésima potencia de algún otro racional, tiene la solución irracional $\sqrt[n]{a}$. Sin embargo, no todo número irracional es algebraico, es decir, no todo número real es solución de alguna ecuación polinómica de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ racionales. Como ejemplo, en 1882 F. Lindemann probó que π, el cociente de dividir la longitud de una circunferencia por su diámetro, no es algebraico. Por otro lado, tampoco es cierto que todo número algebraico sea real, por ejemplo las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ son los números complejos no reales $\pm i$. Resumamos lo dicho, el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, además de partirse en racionales (decimales infinitos periódicos) e irracionales (decimales infinitos no periódicos) puede ser particionado en algebraicos y trascendentes, esto es, no algebraicos. ¡Y es un hecho muy curioso que hay muchos más números reales trascendentes que algebraicos!



Finalmente, qué otro tipo de números podemos obtener como soluciones de una ecuación polinómica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0 \text{ con } a_n \neq 0 \text{ y } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

La respuesta a esta pregunta la da el Teorema Fundamental del Álgebra, cuya versión inicial es la siguiente: *Todo polinomio real tiene raíces reales o complejas*, es decir, *la ecuación* (1) *tiene n soluciones y son todas ellas números complejos.* Más aún, si consideramos la ecuación anterior con coeficientes complejos sólo obtendremos n soluciones complejas. Es en este sentido que decimos que la cadena de inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ se detiene en los complejos $\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$. Es pues un hecho bastante sorprendente que sólo se requiera agregar a $\mathbb{R}$ una raíz de $x^2 + 1 = 0$ para obtener el conjunto completo de soluciones a cualquier ecuación de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$, con $a_n \neq 0$ y $a_0, \ldots, a_n$ incluso complejos.

Amílcar J. Pérez A.

Departamento de Matemáticas.
Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.

ORM

JUNIO 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 Unos amigos se dan la mano al saludarse cuando llegan a una reunión. Si hubo 15 apretones de mano, ¿cuántos amigos estuvieron en la reunión?	**2** Cada letra representa un dígito y un dígito es sólo una letra. ¿Cuál es el valor de K? O K + K O WOW	**3** ¿Cuál es el menor número de letras que deben ser removidas de la palabra KANGOUROU de tal forma que las letras que queden se encuentren en orden alfabético?	**4** Un número tiene ambos dígitos idénticos y es múltiplo de 3 y de 9. ¿Cuál es el número más pequeño que cumple con esto?
7 ¿Cuánto es el producto de la décima parte de 100 por 10?	**8** Diez lombrices se arreglan en una columna para subir una tras la otra. La longitud de cada lombriz es 8 cm. Dejan 2 cm entre cada una de ellas para no chocar. ¿Cuál es la longitud cubierta por las lombrices desde las puntas extremas de la primera y la última?	**9** La suma de los dígitos de la representación decimal de un número de tres dígitos es igual a tres. ¿Cuántos números de tres dígitos cumplen con esta propiedad?	**10** ¿Qué número debemos sustituir en lugar de ♣ para que se satisfaga la siguiente igualdad? $9 \times 12 \times 15 = 6 \times ♣ \times 5$	**11** Un estudiante escribe en su cuaderno de ejercicios los números $10, 11, 12, 13, \ldots, 100$ (del 10 al 100). ¿Cuántas veces se escribió el dígito 3?
14 Seis puntos distintos están situados en una recta y un séptimo punto fuera de ella. ¿Cuál es el número de triángulos que se pueden formar si los puntos dados son vértices?	**15** El punto B es colocado en el segmento AC. Se encuentra a 64mm de distancia del punto A y a 38mm del punto C. ¿Cuál es la distancia entre los puntos medios de AB y BC?	**16** Susana juega con una caja de figuras de madera. Ella descubrió que 6 cubos pequeños pesan lo mismo que 7 cilindros, que 7 cilindros pesan igual que 3 cubos grandes y que 2 cubos grandes equivalen al peso de un chocolate de 200gr. ¿Cuál es el peso de un cubo pequeño?	**17** Pablo es tres veces mayor que Adriana. En cuatro años Pablo tendrá el doble de la edad de Adriana. ¿Qué edad tiene Pablo en estos momentos?	**18** Si dividimos la edad de Héctor por 5 se obtiene 3 de resto. Su edad es el doble de la mía. ¿Cuál es el resto de dividir mi edad por 5?
21 En un acuario hay 200 peces. Un uno por ciento de los peces son azules y el resto amarillos. ¿Cuántos peces amarillos deben ser sacados del acuario para hacer que el porcentaje de peces azules aumente a 2 %?	**22** Un coleccionista gasta 100 BsF en comprar sellos de 1, 4 y 12 BsF. ¿Cuántos sellos serán de 12 BsF si en total ha comprado 40 sellos?	**23** ¿Cuál es el menor resultado que se puede obtener al insertar paréntesis en la expresión $4 \times 12 - 18 \div 6 + 3$?	**24** *Más de la sucesión de Fibonacci* 	**25** Una secuencia se forma de los números $234252342523425\ldots$ hasta 2009 dígitos. ¿Cuáles son los últimos 3 dígitos?
28 ¿Cuál es el valor de $\dfrac{12 \times 13 - 5 \times 12}{24}$?	**29** El resultado de $995 \times 995 - 994 \times 996$ es igual a:	**30** Carla codifica números: en el lugar de cada dígito, ella escribe el último dígito de su cuadrado (por ejemplo, ella reemplaza 7 por 9 y 2 por 4). ¿Cuántos números se convertirán en 456 después de codificarlos?		

Un problema no tan complejo

Considérese la siguiente pregunta, en apariencia muy compleja pero, como se verá más adelante, de desarrollo elemental.

Calcule el dígito de las unidades de $1^1 + 22^{22} + 333^{333} + \cdots + 999999999^{999999999}$**.**

Lo primero que se observará es que la pregunta habla sobre el dígito de las unidades, o *último dígito* como se le llama en algunos casos. El dígito de las unidades tiene algunas propiedades interesantes, que se enunciarán a partir de la observación de ejemplos. Para esto, se calculará por el método tradicional la suma y la multiplicación de los números 237 y 359.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 2 & 3 & 7 \\
+ & 3 & 5 & 9 \\
\hline
 & 5 & 9 & 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 3 & 7 \\
 & \times & 3 & 5 & 9 \\
\hline
+ & 2 & 1 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 8 & 5 & \\
7 & 1 & 1 & & \\
\hline
8 & 5 & 0 & 8 & 3
\end{array}
$$

En la suma (a la izquierda en la gráfica) nótese que el resultado final de la operación tiene como dígito de las unidades 6, el mismo dígito de las unidades de $7 + 9 = 16$. En la misma forma en la multiplicación (a la derecha en la gráfica) puede verse que el producto tiene como dígito de las unidades 3, el mismo dígito de las unidades de $7 \times 9 = 63$. Una forma de explicar esto es que las operaciones se realizan de derecha a izquierda y que en cada caso los resultados de la columna derecha solamente dependen de los números que aparecen directamente en esa columna, ya que allí no se *lleva* nada de operaciones anteriores.
A partir de esas observaciones, se enunciará el primer resultado importante para simplificar el problema:

> *En operaciones de suma y/o multiplicación de números enteros positivos, el dígito de las unidades será la operación aplicada a los dígitos de las unidades de los números a los que se aplica la operación.*

Así por ejemplo, el dígito de las unidades de $37 \times 53 \times 74$ será el mismo dígito de las unidades de $7 \times 3 \times 4 = 84$, es decir, el dígito de las unidades de $37 \times 53 \times 74$ es 4. Con este primer enunciado, el problema original se reduce a

Calcule el dígito de las unidades de $1^1 + 2^{22} + 3^{333} + \cdots + 9^{999999999}$**.**

Aunque la extensión de la mayoría de los números se redujo, siguen apareciendo términos inmanejables como por ejemplo $9^{999999999}$, en el que algunas técnicas de cálculo permiten saber que tiene 954242509 dígitos. Corresponde entonces el turno a simplificar en alguna forma los términos de la expresión, fijando especial atención a sus exponentes.

Tomando como referencia el ejemplo de 3^{333}, número suficientemente grande como para calcular a mano o incluso en un computador, se verá cómo simplificar todos los sumandos del enunciado del problema. Las potencias de 3, iniciando en 3^1, son $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$ y así sucesivamente. Si se concentra la atención en el dígito de las unidades y se hace una lista de los dígitos de las unidades obtenidos, se obtendrá 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, ..., donde se observa el inicio de un ciclo de cuatro términos (3, 9, 7, 1) que se repetirá tantas veces como se calculen las potencias de 3. De aquí surge la necesidad de formar una tabla con los dígitos de las unidades de las potencias de los números de 1 a 9, como se ve a continuación:

Exponente	Dígito de las unidades								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	1	4	9	6	5	6	9	4	1
7	1	8	7	4	5	6	3	2	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observando esta tabla es posible enunciar un segundo resultado que hará más sencillo el problema:

> *Al observar las potencias enteras positivas de un número entero positivo el dígito de las unidades se repite en forma cíclica, y aunque la longitud de ese ciclo depende únicamente del dígito de las unidades de la base, es posible afirmar que esa longitud del ciclo es siempre un divisor de 4.*

Así, el ciclo cuando el dígito de las unidades de la base es 1, 5 ó 6 es de longitud 1, es decir, el dígito de las unidades se mantiene constante, para dígito de las unidades de la base 4 ó 9 el ciclo es de longitud 2 y para dígito de las unidades de la base 2, 3, 7 u 8 el ciclo es de longitud 4. De esta forma, lo que realmente importa en el problema original, al momento de decidir los dígitos de las unidades que se van a sumar, es la posición de la potencia en el ciclo que le corresponde. Siguiendo el ejemplo de 3^{333}, como el ciclo correspondiente a 3 es de longitud 4, basta encontrar el residuo que determina 333 al dividirse entre 4 y en correspondencia a ese residuo ubicar en la tabla el dígito de las unidades adecuado. Así, el problema se transforma en calcular el dígito de las unidades de $1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 6 + 7 + 6 + 9$, por lo que la respuesta final es 7.

Oscar Bernal

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

OJM

JULIO 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			1 ¿Cuántas veces en el día y la noche ambas agujas de un reloj forman una línea recta?	**2** El número de hermanos de William es el mismo que el número de sus hermanas. Pero su hermana Ana tiene el doble de hermanos como hermanas tiene. ¿Cuántos hermanos y hermanas son en total?
5 *Geometría en las flores* 	**6** Los puntos A, B, C, D se encuentran marcados en una recta. Se sabe que $AB = 13$, $BC = 11$, $CD = 14$ y $DA = 12$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos más distantes?	**7** En el planeta *Ninguno*, en el año hay 3 meses y en cada mes hay 10 días. Jessica tiene 360 días de edad en la Tierra. ¿Cuántos años tendrá en *Ninguno*?	**8** ¿Cuántos enteros de dos y tres dígitos son mayores que la suma de sus dígitos?	**9** ¿Cuál es el área del cuadrado cuyo lado es 5 cm mayor que el lado del cuadrado cuya área es 121 cm^2?
12 Un libro tiene 286 páginas; cada página tiene 32 líneas y cada línea 60 letras. ¿Cuántas letras hay en todo el libro?	**13** Se escriben los números $356, 357, 358, \ldots, 862$ consecutivamente en una lista. ¿Cuál número ocupa la posición central de la lista?	**14** Siete estudiantes quieren abordar una lancha pero sólo hay puesto para 6. ¿De cuántas maneras posibles puede un grupo de 6 estudiantes ser seleccionado para montarse en la lancha?	**15** ¿Cuál es el resultado de $5+10+15+20+\ldots+90+95+100$?	**16** Hoy es el cumpleaños de Carlos. Su edad hoy, en meses, es 72 veces más que su edad hace 5 años, en años. ¿Cuál es la edad de Carlos hoy, en años?
19 ¿Cuál es la suma de todos los números naturales que cumplen con la propiedad que al ser divididos por 7 su resto es igual a su cociente?	**20** La edad promedio de 11 jugadores de futbol es 21 años. Durante el juego, uno de los jugadores sale del partido quedando sólo 10 en el campo. El promedio de las edades de los jugadores que quedan en campo cambió a 20 años. ¿Qué edad tenía el jugador que salió del partido?	**21** ¿Cuál es el área de un trapecio isósceles del cual se sabe que tres lados consecutivos miden 1 cm, 2 cm y 3 cm?	**22** Un prisma con base cuadrada tiene altura del doble de longitud que el lado de la base. La diagonal interna mide 24 m. ¿Cuál es el volumen del prisma?	**23** Gregoria obtuvo 94 % del puntaje máximo en su primer examen de matemáticas, el 91 % en el segundo examen, 88 % en su tercer examen y 91 % en el cuarto examen. ¿Cuál es el promedio de Gregoria en sus cuatro exámenes sobre 20 puntos?
26 Jaime es cinco veces mayor que Gilberto. María es 7 años mayor que Jaime. Si Gilberto tiene y años de edad, ¿cuál es la expresión que determina la edad de María?	**27** 6 Canguros comen 6 sacos de pasto en 6 minutos. ¿Cuántos Canguros comerán 100 sacos de pasto en 100 minutos?	**28** ¿Cuál es la suma de la siguiente secuencia de números: $1-2+3-4+5-\ldots-2008+2009$?	**29** En un juego, se enumera del 1 al 999 una fila de personas. Al oír la señal, dos de ellas (sólo dos) pueden intercambiar sus puestos. ¿Al menos cuántos pasos son necesarios para obtener el orden $999, 1, 2, \ldots, 998$?	**30** La medida del lado de un cuadrado $ABCD$ es igual a 1. Se dibuja el cuadrado $EFGH$ cuyos vértices E y F se encuentran en la diagonal BD, G en el lado BC, y H en el lado CD. ¿Cuál es el área del cuadrado $EFGH$?

Particiones y sumas. Un teorema de Schur

¿Se puede partir el conjunto de los números enteros positivos $\{1,2,3,4,\dots\}$ en dos partes A y B tales que para cada par de números n,m en A, la suma $n+m$ pertenece a B y para cada par de números i,j de B su suma $i+j$ pertenece a A?
La respuesta es negativa, como resulta del siguiente teorema de I. Schur.

Teorema (Schur). *Para toda partición de los números enteros positivos* $\{1,2,3,4,\dots\}$ *en dos partes* A *y* B*, una de las partes contiene tres números* k,n,m *tales que* $k=m+n$.

Este teorema se puede demostrar usando un resultado combinatorio relacionado con un importante teorema de 1930 debido a F. P. Ramsey.
Dado un conjunto X podemos considerar la colección de sus subconjuntos con exactamente dos elementos, que denotaremos $\mathcal{P}_2(X)$. Por ejemplo, si $X=\{a,b,c\}$, entonces

$$\mathcal{P}_2(X)=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}.$$

Sea $K=\{a,b,c,d,e,f\}$ un conjunto con 6 elementos. En este caso $\mathcal{P}_2(K)$, el conjunto de los pares de elementos de K, tiene $\binom{6}{2}=15$ elementos. Si clasificamos estos pares en dos tipos, digamos que a algunos pares le asignamos color verde y a otros color rojo, siempre obtendremos un triángulo verde o un triángulo rojo, es decir, siempre podremos encontrar tres elementos de K tales que todos los pares formados por ellos son del mismo tipo. Por ejemplo, en la Figura 1, asignamos rojo al par $\{a,b\}$, verde al par $\{a,d\}$, etc.

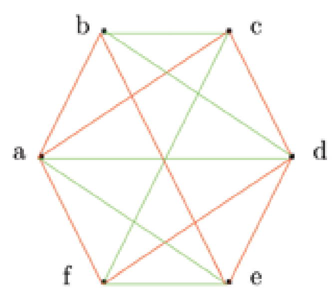


Figura 1

Intente completar la coloración sin formar un triángulo rojo o un triángulo verde. ¿Qué color le daría al par $\{b,f\}$?

Vamos a demostrar que para cualquier manera de asignarle color verde o rojo a los pares, habrá un triángulo cuyos lados son todos verdes o todos rojos.

Para esto basta darse cuenta de que si fijamos un elemento de K, por ejemplo a, y asignamos colores a los pares formados por a con los demás elementos, tendremos por lo menos tres pares del mismo color, como en la Figura 2.

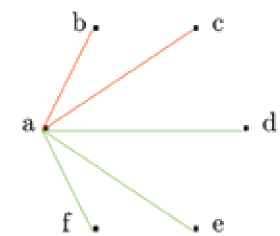


Figura 2

En este caso, si a alguno de los pares formados por d, e, y f se le asigna color verde, tendremos nuestro triángulo verde. ¿Y en caso contrario? Dejamos que el lector termine la demostración respondiendo esta pregunta.

Lo mismo vale si tomamos un conjunto K con más de 6 elementos, incluyendo la posibilidad de que K sea infinito. En cambio, con un conjunto K de 5 elementos no podemos repetir el argumento. Invitamos al lector a encontrar una manera de asignar color verde o rojo a cada par de elementos del conjunto $\{a,b,c,d,e\}$ de modo que no haya triángulos de un solo color.
Sabiendo esto podemos demostrar el Teorema de Schur. Si partimos el conjunto $\mathbb{N}^*$ de los enteros positivos en dos partes, A y B, definamos una partición de $\mathcal{P}_2(\mathbb{N}^*)=V\cup R$ de la manera siguiente.

$$\{m,n\}\in V \Leftrightarrow |n-m|\in A.$$

Y por lo tanto, $\{m,n\}\in R \Leftrightarrow |n-m|\in B$. Basta ahora tomar seis números a,b,c,d,e,f cuyas diferencias entre cada dos de ellos sean todas distintas. Por ejemplo $1,2,2^2,2^3,2^4,2^5$. Sabemos que existen tres de esos números, digamos $u<v<w$, que forman pares todos en V o todos en R. En el primer caso, tenemos que las diferencias $v-u$, $w-v$ y $w-u$ son tres números distintos que están todos en A (en el otro caso estarán todos en B). Estos son los tres números que deseábamos encontrar, ya que

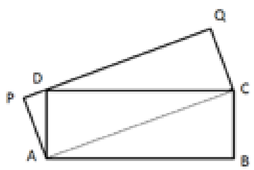
$$(v-u)+(w-v)=(w-u).$$

Carlos A. Di Prisco

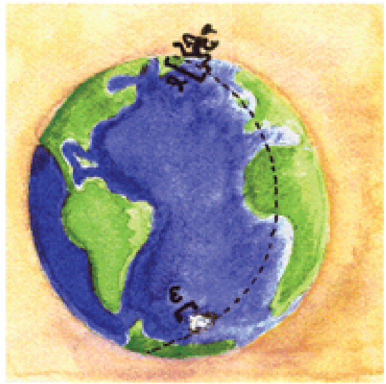
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas.

OJM

AGOSTO 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 El rectángulo $ABCD$ tiene área 1. ¿Cuál es el área del rectángulo $ACQP$? 	**3** Marcos abrió su libro de matemáticas y notó que la suma de los números de las dos páginas que veía era 125. ¿Cuál es el número de página con menor valor?	**4** Cada letra representa un dígito y cada dígito una sola letra. ¿Cuánto vale $PAPA$? $\begin{array}{r} A \\ +\ \ A\ P \\ +\ A\ P\ P \\ \hline P\ Q\ A \end{array}$	**5** Cuatro niños dividen una torta en trozos iguales. Justo cuando van a comenzar a comer, aparece un quinto niño. Cada uno de los niños con trozo de torta dan una parte para que el quinto tenga torta y todos quedan con trozos de igual tamaño. ¿Qué porcentaje menos comieron los cuatro niños?	**6** En una mesa se colocan 5 cartas, 2 de ellas cerradas y 3 de ellas mostrando el número. En una movida, se pueden voltear exactamente 2 cartas al mismo tiempo (cualesquiera 2 cartas que se escojan). ¿Cuánto es el mínimo de movimientos que hacen falta para tener las 5 cartas cerradas?
9 Para cada número de dos dígitos, el dígito de las unidades es restado del dígito de las decenas. ¿Cuál es la suma de los números obtenidos?	**10** Se listan los números de cuatro cifras crecientes de izquierda a derecha, por ejemplo, 1234 ó 4679. Se escoge el mayor de éstos que es divisible por 6. ¿Cuál es el dígito de las centenas de este número?	**11** Los cinco signos representan cinco dígitos diferentes. $\heartsuit + \heartsuit + \heartsuit = \star$ $\clubsuit + \clubsuit + \clubsuit = \S$ $\star + \S = \diamondsuit$ $\diamondsuit =\ ?$	**12** Somos números de dos cifras cuya diferencia es 3 y somos múltiplos de 3. ¿Cuántos números somos?	**13** Carla escogió un número del 1 al 15. Pedro le propone un conjunto de números y le pregunta si el número que ella escogió está en el grupo y Carla sólo puede contestar si o no. ¿Cuál es el menor número de veces que Pedro debe preguntar para determinar el número?
16 La bomba A llena una piscina en 2 horas, la bomba B lo hace en 3 y la bomba C en 6 horas. ¿Cuántas horas tomará llenar la piscina si las tres bombas trabajan al mismo tiempo?	**17** Ana nació el 29 de febrero y por ello tiene una fiesta de cumpleaños en su día de nacimiento cada 4 años. Este año organiza su séptima fiesta. ¿Qué edad tiene Ana?	**18** Si hay dos buses en una ruta circular, el intervalo de tiempo entre ellos es de 25 minutos. ¿Cuántos buses extra son necesarios para acortar el intervalo de tiempo en un 60 %?	**19** ¿Cuál es el ángulo entre las agujas del reloj cuando muestra las 12:20?	**20** ¿Cuántos números de dos dígitos existen tales que la suma de sus dígitos es un número par?
23 ¿Cuál es el valor de x en $\frac{35}{2x+1} - 4 = 1$?	**24** El precio de un CD es incrementado en un 10 % y luego se le genera un descuento de 20 %. ¿Qué porcentaje del precio inicial es el nuevo precio?	**25** Una florista tiene 24 flores blancas, 42 rojas y 36 amarillas disponibles para la venta. A lo máximo, ¿cuántos ramos idénticos puede armar si quiere usar todas las flores que quedan?	**26** Las medidas de los ángulos internos del triángulo ABC se encuentran a razón de 2:3:5. ¿Cuánto mide el menor de dichos ángulos?	**27** La mitad de las dos terceras partes de los tres cuartos de un número es 567. ¿Cuál es el número?
30 Se conocen dos números con la siguiente propiedad: la razón entre la suma de los números, la diferencia y el producto de ellos es 5:1:18. Estos números son:	**31** Un *salto* tiene 90 cm mientras que un *paso* tiene 60 cm. Si Penélope da 400 saltos, ¿cuántos pasos tiene que dar Samantha para cubrir la misma distancia?			

Curiosidades sobre los números irracionales



Realizado por Lucía Simonelli

Considere una persona como la de la figura con paso de longitud α, un número irracional. Esta persona camina por uno de los meridianos de un planeta que tiene longitud 1. Si en este meridiano existe un hoyo de diámetro ϵ, con $1 > \epsilon > 0$, pruebe que eventualmente dicha persona caerá en el hoyo.

Una excelente estrategia para familiarizarse con un problema, y eventualmente resolverlo, es **jugar** con los casos particulares. Si α fuese un número racional entonces habría sólo un número finito de puntos sobre el meridiano y podríamos escoger la posición y el tamaño del hoyo apropiadamente para evitar que la persona caiga en él. Más aún, esta propiedad determina también si α es racional. Sin embargo el hecho de que el número de puntos sobre el meridiano donde la persona pisa sea infinito no tiene por qué implicar inmediatamente que uno de esos puntos esté dentro del hoyo.

Cuando α es irracional podemos decir que no existe ningún punto en el meridiano donde la persona pise dos veces. Consideremos ahora un número $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$ y pasemos ahora a subdivir el meridiano en N partes iguales. Por el principio de las casillas tenemos que luego de $N+1$ pasos podemos asegurar que hay dos lugares distintos en una de las N casillas donde la persona habrá pisado y que por lo tanto están separados por una distancia β, con $0 < \beta \leq 1/N < \epsilon$.

Ahora podemos pensar que dicha persona camina con paso de longitud β. Como $\beta < \epsilon$ tenemos que eventualmente con pasos de esta longitud la persona cae dentro del hoyo.

Si aún no estás sorprendido con este resultado piensa en lo siguiente. $\log_{10} 2$ es irracional de modo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{\log_{10} 2009\} \leq \{N \log_{10} 2\} < \{\log_{10} 2010\}$[1] lo cual implica que 2^N comienza con los dígitos 2009. Y lo mismo es posible con tu número favorito.

Experimentos

1. Considera $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, el meridiano es la circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y radio $r = \frac{1}{2\pi}$. La persona comienza su paseo en el polo norte que está en el punto $(0, r)$ y avanza en sentido horario. Para un hoyo de diámetro $\epsilon = 0,1$ con centro en el polo sur, determina en cuál paso la persona cae por primera vez en dicho hoyo.[2]

2. Para n igual a cada uno de los números del 1 al 9 halla la primera potencia de 2 que comienza por n.[3]

3. Para cada uno de los primeros 20 pasos calcula el cociente del número de pasos que han caído en el hoyo entre el número de pasos. Con la ayuda de una computadora podemos obtener este resultado para una cantidad mayor de pasos y observar que este cociente se aproxima al diámetro del hoyo. (Este resultado es más difícil de probar).

Con este último experimento queremos hacer notar una propiedad más profunda. La transformación $T : [0,1] \to [0,1]$ tal que $T(x) = \{\alpha x\}$ preserva la medida. Es decir, que para un subconjunto de $[0,1]$ la imagen por T tiene el mismo tamaño. No es nuestra intención definir rigurosamente las líneas previas, el comentario es sólo una referencia. La teoría que estudia tales transformaciones se llama Teoría Ergódica y tiene aplicaciones en sistemas dinámicos, física, análisis armónico y teoría de números. En particular, Ben Green y Terrence Tao hicieron uso de estas ideas para probar que existen progresiones aritméticas de números primos arbitrariamente largas.

Problemas

1. Si dos personas caminan en el mismo meridiano con pasos α_1 y α_2 irracionales tales que el cociente entre α_1 y α_2 tambien es irracional entonces existe un paso en el cual los dos caen en el hoyo.

2. Demuestra que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que 2^N comienza por 2009 y 3^N comienza por los dígitos del año en que naciste.

3. Una recta que pasa por el origen del plano cartesiano con pendiente irracional no pasa por ningún punto con coordenadas enteras con excepción del origen. Sin embargo, existen puntos con coordenadas enteras que están tan cerca como quieras de esta recta.

Referencias

ENGEL Arthur, *Problem Solving Strategies.*
Springer - Verlag 1999, New York.

GREEN Ben, TAO Terence, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions.*
http://arxiv.org/abs/math/0404188v6

Héctor Chang

Ex-olímpico

Licenciado en Matemáticas, Universidad Simón Bolívar

[1] $\{a\}$ denota la *parte fraccionaria* de a, por ejemplo $\{1,654\} = 0,654$, $\{\pi\} = 0,14159...$

[2] Respuesta: al cuarto paso

[3] $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^5 = 32, 2^2 = 4, 2^9 = 512, 2^6 = 64, 2^{46} = 70368744177664, 2^3 = 8, 2^{53} = 9007199254740992$

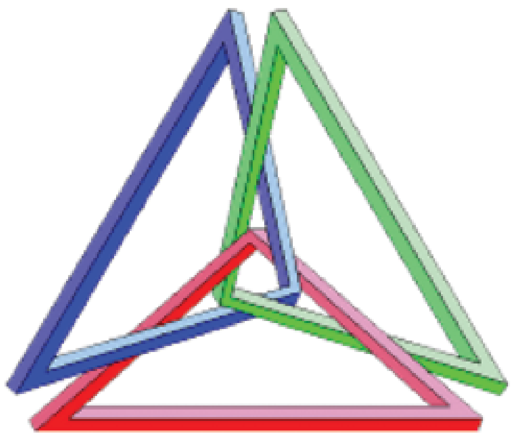
OJM

SEPTIEMBRE 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		1 La suma de los dígitos del número $10^{101} - 9$ is igual a:	**2** En la siguiente suma el * representa dígitos desconocidos. ¿Cuál es la suma de los dígitos del resultado? $\begin{array}{r} 5\ 8\ *\ 7 \\ +\ 9\ 8\ 1\ * \\ \underline{+\ *\ 9\ 5\ 9} \\ *\ 7\ *\ 4\ 8 \end{array}$	**3** En el triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo C, CD, mide igual que la base BC. ¿Cuál es la medida del ángulo CDA?
6 Un número x es tal que su cuadrado excede a x en n. ¿Para cuántos enteros positivos con $n \leq 100$, el número x resulta ser un número entero?	**7** Los números -9, 0, -5, 5, -4, -1, -3 se agrupan de dos en dos de tal forma que se obtiene la misma suma en cada grupo. Con esta agrupación un número queda solo. ¿Cuál es ese número?	**8** Jugando a contar hasta 70 por saltos de dos en dos, de tres en tres o de cinco en cinco, siempre lo consigo comenzando en un número particular. ¿Cuál es el número más pequeño con el que pude comenzar?	**9** ¿Cuál es el último dígito en la suma $1!+2!+3!+4!\ldots+2007!+2008!$? (Por definición, $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$)	**10** Se tiene un cuadrilátero $ABCD$ con $AB = BC = CD$ y $AD = AC = BD$. Halle el menor ángulo del cuadrilátero.
13 ¿Qué valores puede admitir a si $\|a+b\| \leq 1$ y $\|a-3b\| \leq 2$?	**14** El mayor número n tal que la suma $1+2+\ldots+n$ es menor o igual que 2010 es:	**15** Una piscina vacía se estuvo llenando de agua desde las 9 am hasta las 4 y cuarto de la tarde. Si se llenó a razón de 10 litros por minuto, ¿cuál es su capacidad, en hectolitros?	**16** ¿Cuántos triángulos rectángulos diferentes hay tales que los catetos son enteros positivos y su área igual a 36 unidades cuadradas?	**17** Los múltiplos del número 7 se escriben en secuencia de la siguiente manera: 714212835... ¿Cuál es el dígito en la posición 2010 de la secuencia?
20 En un plano coordenado, los vértices de un triángulo son $(3,7), (3,19)$, y $(13,1)$. En unidades cuadradas, ¿cuál es el área de este triángulo?	**21** $6^{10} \cdot 5^2 = 2^M \cdot 3^N \cdot 300$. ¿Cuánto vale $M+N$?	**22** $\Diamond + \heartsuit + \bigcirc + \Diamond + \Delta + \bigcirc = 17$ $\Diamond + \heartsuit + \bigcirc = 9$ $\heartsuit - \Delta = \ ?$	**23** Un error ocurrió al imprimir un libro en la numeración de las páginas. Todos los múltiplos de 3 fueron aumentados en una unidad de manera que la numeración quedó $1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots$ El libro tiene en la realidad 89 páginas. ¿Qué número quedó marcado en la última página después de ser impreso?	**24** ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $-2 - \frac{60}{3(14+3x)} = 3$?
27 En el triángulo rectángulo ABC, la mediana BM y la altura BH son dibujadas desde el vértice B del ángulo recto. ¿Cuál es el ángulo en el vértice A si $BM = 2BH$?	**28** La suma de dos números es mayor por un 50 % que su diferencia. ¿Por cuánto por ciento es la suma de los cuadrados de estos números mayor que el producto de ellos?	**29** Sumamos $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$. La cifra de las unidades del resultado es:	**30** Si una cantidad inicial es incrementada en un 50 % y el resultado disminuido en un 40 % para obtener una cantidad final, ¿en qué porcentaje la cantidad inicial varió?	

¿Ambigüedad en el Teorema del Seno?

Hace algunos años, cuando corregía unos exámenes de trigonometría, me encontré con una prueba donde uno de mis estudiantes daba una respuesta incorrecta, pero con un razonamiento donde yo no hallaba ningún error. Obligado a confesar delante de todo el curso, les ofrecí algunos puntos adicionales a quien consiguiera el error en el razonamiento de su condiscípulo y les dije que podían consultar con cualquier persona que supiera sobre el tema. Pasaron varias clases donde la pregunta inicial era la misma y donde después de escuchar algunos intentos de justificación, ninguno aclaraba la situación. Ante mi desesperación, me vi obligado a aumentar la recompensa, sin dejar de pensar yo mismo en el problema, hasta que finalmente recurrí a mi último comodín: llamar a un amigo, por supuesto, con más experiencia que la mía en estas lides. Después de un buen rato de conversación telefónica, calculadora en mano, descubrimos que el error estaba en una incompleta interpretación del Teorema del Seno.



El Teorema del Seno, como todos sabemos dice que *En todo triángulo las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos,* es decir que si α es el ángulo que se opone al lado de longitud a; β es el ángulo que se opone al lado de longitud b y γ es el ángulo que se opone al lado de longitud c entonces:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

La demostración de este Teorema, se encuentra en cualquier texto de trigonometría y se hace para triángulos acutángulos y para triángulos obtusángulos, en este último caso generalmente es necesario utilizar la identidad $\operatorname{sen}(180-x)=\operatorname{sen}(x)$ o una equivalente y aquí comienzan las ambigüedades. Sabemos que los ángulos internos de un triángulo están entre 0 y 180 grados y en este intervalo hay dos ángulos que tienen el mismo seno, por lo tanto cuando usamos el Teorema para despejar uno de los ángulos, tenemos tres posibles situaciones: o que no exista, o que tenga una única solución (en el caso de un ángulo recto) o que tenga dos soluciones. En este último caso ¿serán siempre válidas las dos? y si no lo son ¿cómo sabemos cuál de las dos soluciones tomar?.

Consultando con algunos textos escolares de los que usamos acá en Venezuela conseguimos algunas explicaciones para resolver triángulos cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto de uno de ellos, pero el problema que genera este artículo no era ese caso o más bien era una situación que escondía el uso de ese caso. Observemos estos dos problemas, resueltos de la misma manera y que nos llevan a una solución correcta y otra errada:

El profesor plantea y resuelve en la pizarra el primer problema: *un triángulo tiene las siguientes medidas:* $a=10; b=15$ *y* $c=13$. *Halle las medidas de sus ángulos internos.*

Solución: usando el teorema del coseno podemos hallar uno de sus ángulos, por ejemplo $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ de donde $\alpha=arc\cos((b^2+c^2-a^2)/2bc)$ y de allí $\alpha=41°4'31{,}26"$. Luego aplicando el teorema del seno hallamos $\beta=arc\operatorname{sen}((b\operatorname{sen}\alpha)/a)=80°15'24{,}85"$ y finalmente hallamos $\gamma=180°-\alpha-\beta=58°40'3{,}89"$ y véase por donde se vea, ésta es la respuesta correcta.

El segundo problema es similar al primero, sólo que los datos ahora son los siguientes: $a=10; b=25$ y $c=20$. No parece haber ninguna diferencia estructural por lo que aplicamos el mismo algoritmo obteniendo: $\alpha=22°19'53{,}92"; \beta=71°47'24{,}16"$ y $\gamma=85°52'41{,}92"$.

Ahora bien, esta última respuesta no puede ser correcta puesto que sabemos que en todo triángulo el ángulo mayor se opone al lado mayor y en nuestra solución, esto no es así ya que b que es el lado mayor se opone a β que no es el ángulo mayor. ¿Dónde está el error? después de la introducción es lógico pensar que al aplicar el Teorema del seno la solución para β elegida no es la correcta ya que habría que tomar como β el suplemento de este valor, es decir $\beta=108°12'35{,}84"$ y por lo tanto γ sería $49°27'30{,}24"$, que si es la respuesta correcta a nuestro problema.

El primer triángulo es acutángulo, el segundo es obtusángulo, pero ¿podíamos saber esto con los datos que teníamos inicialmente?.

El examen que corregía hace años tenía un problema de este tipo y un alumno lo resolvió de la manera planteada, hoy en día me da un poco de vergüenza no haber descubierto el error con prontitud y es por eso que me atreví a escribir estas líneas, para quizás ayudar a algún colega a que no pase por la misma situación.

Finalmente mi sugerencia para evitar esa ambigüedad en este tipo de problemas donde se dan los tres lados de un triángulo (y si se quiere aplicar también el Teorema del Seno) es, que al usar el Teorema del Coseno para hallar el primer ángulo se aplique sobre el lado más largo para así obtener el ángulo más grande, ya que con el coseno, no pasa lo mismo que con el seno, puesto que para ángulos entre 0 y 180 grados no existen dos que tengan el mismo coseno y en un triángulo sólo puede haber un ángulo obtuso.

Lisandro Alvarado

Colegio Los Hipocampitos.
Los Teques.

OJM

OCTUBRE 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			1	**1** ¿Cuántos números pares positivos de dos dígitos hay tales que el primer dígito es mayor que el segundo?
4 Un rectángulo está conformado por 1155 pequeños cuadraditos de lado unidad. ¿Cuál es la longitud máxima del lado más pequeño del rectángulo?	**5** ¿De cuántas maneras diferentes se puede expresar el número 15 como la suma de números naturales consecutivos?	**6** Freddy trabajó 4 horas más que el doble que las que trabajó Andrés. ¿Cuánto es el máximo de horas que trabajó Andrés si ambos trabajaron máximo 34 horas?	**7** Las medidas en grados de los ángulos de un triángulo son todas cuadrados perfectos. ¿Cuál es el ángulo más pequeño del triángulo?	**8** Si $a = 2$ y $b = 3$, ¿cuál es el valor de $a^b + a + ab + b + b^a$?
11 Los enteros m y n son tales que $m + n = mn$. ¿Cuántos pares diferentes de valores existen para m y n?	**12** *Simetría en la naturaleza* 	**13** Si abc es un número de tres dígitos, llamemos *reversos* a los productos $c \cdot b \cdot a$, $c \cdot ba$ y $cb \cdot a$. ¿Cuántos números de tres dígitos son iguales a alguno de sus productos reversos? (un ejemplo de estos números es 153, ya que $153 = 3 \cdot 51$).	**14** Jaime dijo que el 6 % de los tiques no se habían vendido. Luisa dijo que esto era igual a 18 tiques. ¿Cuántos tiques se vendieron entonces?	**15** Pedro tiene una bolsa de uvas. Cada día se come 2 uvas y la mitad del resto. Después de dos días sólo le quedan 2 uvas. ¿Cuántas uvas se comió Pedro el primer día?
18 ¿Cuál es el último dígito en el número 2008^{2008}?	**19** ¿Qué número debería sustituir el símbolo en la secuencia? $26, 74, 13, 87, 11, 89,$ $42, 58, 37, 63, 12, \spadesuit$.	**20** El máximo común divisor de dos enteros positivos m y n es 12 y el mínimo común múltiplo de ellos es un cuadrado. Dentro de los 5 números $\frac{n}{3}, \frac{m}{3}, \frac{n}{4}, \frac{m}{4}, mn$, cuántos son cuadrados?	**21** Una tabla tiene 21 columnas y 33 filas. Se borran las filas cuyo número no sea un múltiplo de 3 y todas las filas con número par. ¿Cuántas celdas quedan después de eso?	**22** Llamamos a un número de cuatro dígitos *bueno* si contiene sólo los números 1, 2, y 3, y si exactamente dos de sus dígitos contiguos coinciden con los de 1132 y con los de 1213. ¿Cuántos números buenos existen?
25 ¿Cuántos ceros hay al final del producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 162$?	**26** ¿Cuál es el menor número de vértices que puede tener un polígono convexo si el número de las diagonales no es igual a 0 y es divisible por 2007?	**27** ¿Cuántos valores enteros puede tomar n para que $\frac{2n+15}{n+6}$ sea igual a un número natural?	**28** La mitad de los número naturales de la lista de 1 a n incluyen el dígito 1 en su escritura. Halle el mayor número n de dos dígitos que cumple con esta propiedad.	**29** ¿Cuántos números de dos dígitos tienen sus dígitos diferentes?

Tres demostraciones del Teorema de Pitágoras

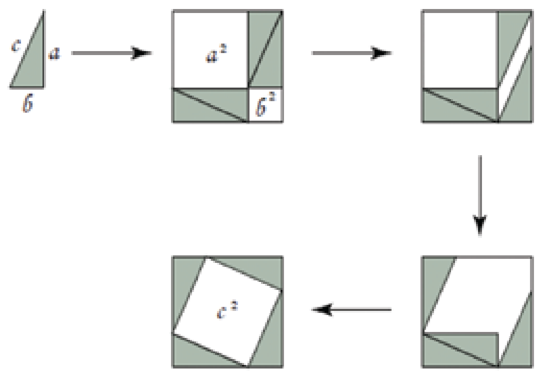
El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo el cuadrado del lado de mayor longitud es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados del triángulo.

Este teorema es uno de los resultados más conocidos de la geometría y es de los teoremas que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos. Presentamos a continuación tres demostraciones clásicas de este resultado.

La Demostración del Chou pei suan ching

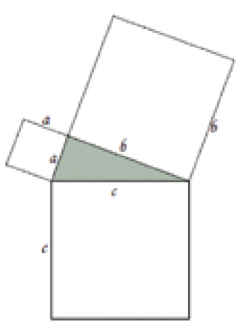
Una de las demostraciones mas simples y antiguas del teorema de Pitágoras se encontró en un documento chino llamado el **Chou pei suan ching**; que data aproximadamente de 200 a 500 años A.C.

Comenzando con un triángulo rectángulo de lados a y b e hipotenusa c y un cuadrado apropiado se van haciendo translaciones de triángulos, tal y como se muestra en la figura de la derecha.
De esta manera se tiene que el área no sombreada no cambia en cada paso, obteniendo así que $a^2+b^2=c^2$.



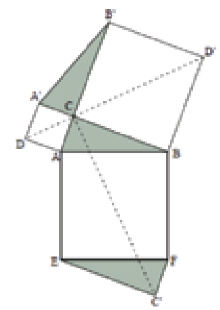
Demostración de Leonardo da Vinci

El pintor Leonardo da Vinci (1452-1519) estableció una hermosa prueba del teorema de Pitágoras construyendo tres cuadrados auxiliares y unas rotaciones simples.



Comenzando con un triángulo rectángulo, construimos tres cuadrados en cada uno de sus lados como se muestra en la figura.

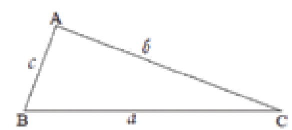
Colocamos dos copias del triángulo inicial de manera apropiada, para obtener la siguiente figura:



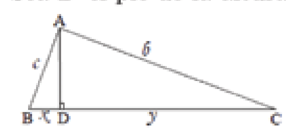
Note que por reflexión se tiene que el cuadrilátero $DA'B'D'$ es congruente con el cuadrilátero $DABD'$. Por otro lado, si rotamos el cuadrilátero $ADD'B$ alrededor de A $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj, se obtiene que $ABD'D$ es congruente a $AEC'C$. Por lo tanto los hexágonos $DA'B'D'BA$ y $CBFC'EA$ tienen la misma área, pues cada uno de ellos se compone de dos cuadriláteros congruentes con el $DABD'$. Como cada uno de estos hexágonos tiene dos copias del triángulo original, entonces las regiones en blanco deben tener la misma área, es decir el área del cuadrado $ABFE$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados $DA'CA'$ y $CB'D'B$. Por lo tanto $c^2=a^2+b^2$.

Demostración atribuida a Pitágoras

La tercera demostración que presentaremos es atribuida a la escuela pitagórica y se basa en el hecho de que dado un triángulo rectángulo, cuando se traza la altura desde el vértice que forma el ángulo de 90° se obtienen dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo original. En efecto, consideremos el triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A:



Sea D el pie de la altura desde A.



Los triángulos ABC y DBA tienen ángulos correspondientes congruentes por lo tanto

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \qquad (2)$$

Igualmente se tiene que

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \qquad (3)$$

De (2) se obtiene que $\dfrac{c}{x}=\dfrac{a}{c}$, luego

$$c^2 = ax \qquad (4)$$

De (3) se obtiene que $\dfrac{b}{y}=\dfrac{a}{b}$, luego

$$b^2 = ay \qquad (5)$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$b^2+c^2 = ay+ax = a(y+x) = a\cdot a$$

Por lo tanto, $b^2+c^2=a^2$

Luís Fernando Cáceres Duque

Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico-RUM - Puerto Rico

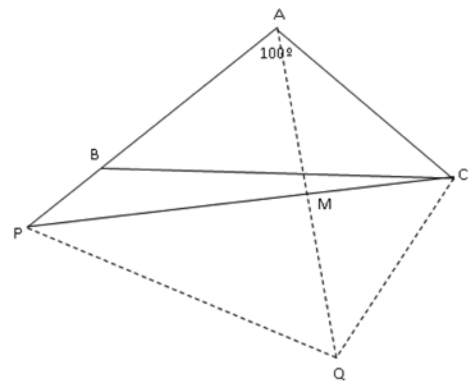
OJM

NOVIEMBRE 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 El producto de dos primos relativos es 37800. ¿Cuántas soluciones diferentes existen para estos dos números?	**2** Un estudiante pensó en cuatro números, calculó todas las posibles sumas entre parejas y escribió cinco de ellas en el pizarrón: 13, 15, 16, 20, 20. ¿Cuál tiene que ser la sexta suma?	**3** ¿Qué número ocupa el puesto 2008 en la secuencia de números 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5 ...?	**4** Llamemos tres números primos *especiales* si el producto de estos números es cinco veces mayor que su suma. ¿Cuántos tríos de números especiales existen?	**5** Si $U+V=1$ y $U^2+V^2=2$, entonces el valor de U^4+V^4 es igual a:
8 Halle el número de triángulos en los que el perímetro es igual a 40cm y las longitudes de sus lados son números enteros.	**9** La suma de dos números es 10 y su producto es 20. Halle la suma de los recíprocos de esos números.	**10** ¿Cuántas soluciones (x, y) de la ecuación $5x+5y=11$ son soluciones enteras?	**11** ¿Cuál es el último dígito en el producto $17^3 \cdot 22^4 \cdot 19^2 \cdot 33^4$?	**12** Los 7 enanos de Blanca Nieves nacieron el mismo día en siete años consecutivos. La suma de las edades de los tres más pequeños es 42. ¿Cuánto suman las edades de los tres mayores?
15 Un día es un *díaprimo* si el número del mes y del día son números primos. Por ejemplo: el 5 de julio= (5, 7). ¿Cuántos díaprimos hubo en el año 2008?	**16** Si $ac+ad+bc+bd=68$ y $c+d=4$, entonces $a+b+c+d$ es igual a:	**17** Halle la suma de los dígitos del número $2^{2008} \cdot 5^{2011}$.	**18** ¿Cuál es la suma de las soluciones reales de la ecuación $f(x)=0$, si todo número real x satisface la ecuación $f(2x+1)=4x^2+14x$?	**19** ¿Cuántos números positivos de tres dígitos hay tales que el primer dígito es mayor que el segundo, que a su vez es mayor que el tercero, y que el número sea divisible entre tres?
22 ¿Para cuántos valores de n es $4n^2+16n-65$ un número primo?	**23** El perímetro de un rombo es 24 cm y su área 18 cm^2. ¿Cuál es el menor valor de los ángulos interiores del rombo?	**24** Si $f(x)=\lvert 5\,\mathrm{sen}\,x-3\rvert$, el máximo valor de $f(x)$ es igual a:	**25** Suponga que la suma de todos los enteros positivos desde 1 hasta n la notamos S. Halle la suma de todos los enteros positivos entre 1 y $2n$ en términos de S y n.	**26** ¿Cuántos números primos p tienen la propiedad que p^2+1 también sea primo?
29 Si $24, a, b, c, 80$ son elementos consecutivos en una secuencia aritmética, entonces $a+b+c$ es igual a:	**30** Las soluciones de la ecuación $x^3+6x^2+ax+b=0$ con a, b números enteros, son dos enteros consecutivos y el número 3. halle el valor del coeficiente a.			

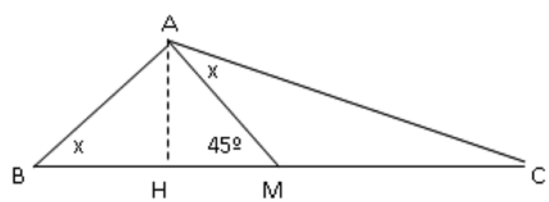
Cuatro problemas de geometría elemental

Primer problema: Se da un triángulo ABC donde el ángulo A mide $100°$ y $AB = AC$. Se prolonga el lado AB hasta un punto P tal que $AP = BC$. Halle el ángulo BCP.



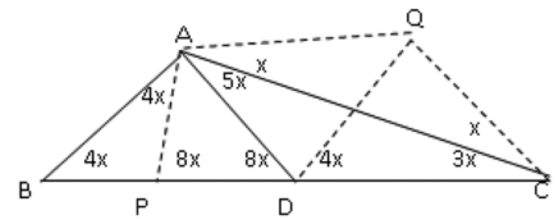
Solución: En la figura a la derecha se ha representado el triángulo ABC dado. Trace por C una recta que forme el ángulo de $100°$ con AC hasta un punto Q tal que $CQ = AC$. Entonces los triángulos ACQ y BAC son congruentes y se tendrá que el ángulo CAQ mide $40°$, $AQ = BC = AP$ y C equidista de A y Q. Por otro lado, el ángulo PAQ mide $100° - 40° = 60°$ y el triángulo PAQ es equilátero. Así, P equidista de A y Q. Ya que C y P equidistan de A y Q, están en la mediatriz del segmento AQ. Por ende, PC corta ortogonalmente a AQ en un punto M. Luego, el ángulo ACM mide $90° - 40° = 50°$. Por tanto, el ángulo BCP mide el ángulo ACM menos el ángulo ACB, es decir, $50° - 40° = 10°$.

Segundo problema: El punto M es el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. El ángulo AMB mide $45°$. Si los ángulos ABC y MAC son iguales, ¿cuánto mide cada uno de estos ángulos?



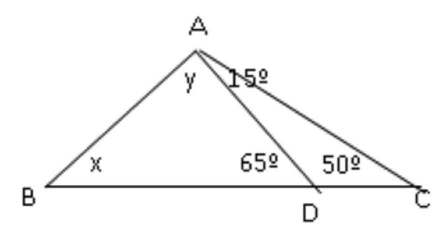
Solución: Los ángulos iguales ABC y MAC se han marcado con x. Se usará $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ y $AM = m$. Se traza la altura AH. Ya que el ángulo AMH mide $45°$ y el ángulo en H mide $90°$ se tiene que el ángulo HAM mide $45°$ y el triángulo AHM es isósceles y rectángulo. Así, se puede escribir $AH = HM = h$. Los triángulos ABC y MAC son semejantes al tener los ángulos iguales x y el ángulo común en C. Luego, $\frac{AB}{MA} = \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{AC}$. O sea, $\frac{c}{m} = \frac{b}{a/2} = \frac{a}{b}$. De la segunda igualdad vemos $2b^2 = a^2$. Por otro lado al ser $AM = m$ la mediana se tiene que $m^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Sustituyendo la primera igualdad en la segunda y simplificando se tiene que $m^2 = \frac{c^2}{2}$. En el triángulo rectángulo AHM Pitágoras nos dice que $m^2 = 2h^2$. Por ende, $c^2 = 4h^2$. O sea, $c = 2h$. Esto indica que en el triángulo rectángulo ABH la hipotenusa $AB = c$ mide el doble del cateto $AH = h$. En consecuencia, el ángulo x en B mide $30°$.

Tercer problema: Sea D un punto entre los vértices B y C del triángulo ABC tal que $AB = DC$, $B = 4x$, $C = 3x$ y $\angle CAD = 5x$. ¿Cuánto vale x?



Solución: Al trazar el punto P en la recta BD tal que $\angle BAP = 4x$ se forma el triángulo isósceles ABP con $AP = BP$. Como los ángulos APD y ADP son exteriores a los triángulos ABP y ADC se sigue que son iguales por tener el mismo valor $8x$. Luego, el triángulo APD es isósceles y se tendrá que $AP = AD$. Se construye el punto Q tal que $\angle QDC = \angle DCQ = 4x$. Se tiene entonces que $\angle QCA = x$ y $DQ = QC$. Ya que los triángulos ABP y CDQ son congruentes por el segundo criterio de congruencia se tiene que $AP = QD$. El triángulo ADQ es isósceles porque $AD = DQ$ y los ángulos DAQ y DQA deben ser iguales. La suma de estos ángulos con el ángulo ADQ es $180°$ lo mismo que la suma de los tres ángulos que se forman en el punto D. Por tanto, cada uno de esos ángulos mide $6x$. Luego, el ángulo QAC debe medir x y el triángulo ACQ es isósceles por lo que $AQ = QC$ lo que indica que el triángulo ADQ es equilátero. Cada uno de sus ángulos mide $60°$. En particular $\angle DAQ = 6x = 60°$ y así $x = 10°$.

Cuarto problema: Sea D un punto entre los vértices B y C del triángulo ABC tal que $BD = AC$, $B = x$, $\angle DAC = 15°$ y $\angle C = 50°$. ¿Cuánto vale x?



Solución: El ángulo ADB es exterior al triángulo ADC y, por ende, mide $50° + 15° = 65°$. Si se supone $\angle BAD = y$ se tiene en el triángulo ABD que $x + y + 65° = 180°$ y se tiene que $x + y = 115°$. (*) Si $x < 50°$ en el triángulo ABC, entonces $AC < AB$. Ya que $AC = BD$ se sigue que $BD < AB$. En el triángulo ABD se tiene que $y < 65°$. Por ende, $x + y < 65°$ lo que contradice la igualdad (*). Si $x > 50°$ en el triángulo ABC, entonces $AC > AB$. Ya que $AC = BD$ se sigue que $BD > AC$. En el triángulo ABD se tiene que $y > 65°$. Por tanto, $x + y > 65°$ lo que vuelve a contradecir a (*). En consecuencia, se obtiene que $x = 50°$.

Dario Durán C.

Universidad del Zulia

OJM

DICIEMBRE 2010

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		1 ¿Para cuántos números naturales de cuatro dígitos el producto de sus dígitos es igual a 168?	**2** Llamemos a un número de tres dígitos *feliz* si la suma de sus dígitos es 25. ¿Cuántos números felices hay en total?	**3** La suma de las soluciones reales de la ecuación $x^{\log\|x\|} = 1$ es igual a:
6 Si $\log_n(2^n) = \frac{n}{4}$, entonces n es igual a:	**7** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $3^x + 3x^2 = 17 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$?	**8** Si $x^2yz^3 = 7^3$ y $xy^2 = 7^9$, ¿cuál es el valor de xyz?	**9** ¿Cuántos números naturales de dos dígitos n existen tales que $10n$ es igual a 11 veces la suma de los cuadrados de los dos dígitos de n?	**10** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $$a^{2x-2} - a^{2x-3} = (a-1)^{x-\frac{1}{2}}$$ si a es un número real mayor que 1?
13 ¿De cuántas maneras posibles se pueden arreglar las letras de la palabra CARGO considerando que la primera y la última letra sean vocales?	**14** ¿Cuántos divisores primos tiene el número $71^2 - 37^2 - 51$?	**15** Halle el valor de la expresión $x^2 + y^2 + z^2$, si $x + y + z = 1$ y $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.	**16** Calcula el valor exacto de $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$.	**17** Llamamos a un número *memorable* si es un número compuesto y si todos los divisores excepto el número 1 son números de dos dígitos. ¿Cuántos números memorables existen?
20 Se tienen 2008 puntos en una circunferencia. ¿Cuál es el mayor número de cuerdas que se pueden dibujar con estos puntos sin que se intersecten en puntos interiores?	**21** Consideremos la secuencia de fracciones decimales simétricas: 1,1; 2,2; ...; 19,91; 20,02; 21,12; ...; 100,001. ¿Cuál es el menor valor absoluto de la diferencia de dos números consecutivos en la secuencia?	**22** ¿Cuántos enteros de cuatro dígitos tienen el dígito de los miles mayor que los otros tres dígitos?	**23** El número $3^{32} - 1$ tiene exactamente 2 divisores entre 75 y 85. ¿Cuál es el producto de esos divisores?	**24** ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $$\cos(x)\mathrm{sen}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$ si $0 < x < \pi$?
27 ¿Cuántos pares (x, y) de enteros positivos x, y con $x > 2$ y $y > 2$ existen para que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$?	**28** Nueve números se escriben en orden ascendente. El número central también es el promedio de todos. El promedio de los 5 mayores es 68 y el promedio de los 5 menores es 44. ¿Cuál es la suma de los números?	**29** Un dado inusual tiene sus seis caras numeradas 1, 2, 3, 5, 7, 9. Si se lanza dos veces y se suman las cantidades mostradas en la cara superior, ¿cuántas sumas diferentes se pueden obtener?	**30** ¿Para cuántos números enteros n, la expresión $(7n-11)/(n-3)$ es un número entero?	**31** El año pasado, cierta isla contaba con 800 habitantes por cada gato. Este año, el número de habitantes decreció en un 16 % y al mismo tiempo, el número de gatos aumentó en un 5 %. ¿Cuántos habitantes por gato hay en la isla este año?

ORM

	Enero
4	1.
5	10 segundos.
6	5.
7	1000.
8	8 unidades.
11	BsF 12
12	24 manzanas.
13	BsF 90.
14	90.
18	96 m.
19	810.
20	39 meses.
21	2.
22	3 kg.
25	88 m.
26	4.
27	Verde.
28	50.
29	3 cm.

	Febrero
1	25.
2	459.
3	68.
4	8.
5	3.
8	9 BsF.
9	3.
10	1772.
11	200.
12	Rojo.
17	Las manzanas.
18	48 % de 2
19	Pedro.
22	28.
23	PJN.
24	1.
25	Tomás.
26	10.

	Marzo
1	11 h 5 min
2	24.
3	Bs 16.
4	22.
5	21 g.
8	13.
9	4.
10	22/03/2003
11	5.
12	6.
15	100.
16	2.
17	2 km.
18	¡SUERTE!
19	13.
22	0.
23	Bs 200.
24	24.
25	Bs. 3.600
26	6.

	Abril
5	56.
6	200.
7	9.
8	159.
9	864.
12	7.
13	400.
14	20.
15	16:35.
16	3 gr.
20	35763 horas.
21	5:40 am.
22	12.
23	2011.
26	8.
27	6:15 pm
28	6.
29	Miércoles.
30	1 triángulo.

	Mayo
3	18.
4	8.
5	88 Kg.
6	18260.
7	312.
10	8.
11	2.
12	5.
13	15.
14	54.
17	1050.
18	10 veces.
19	3.
20	331.
21	10000.
24	45.
25	39.
26	20.
27	9h45min.
28	7.
31	0.

	Junio
1	6.
2	9.
3	4.
4	99.
7	100.
8	98 cm.
9	6.
10	54.
11	19.
14	15.
15	51mm.
16	50gr.
17	12.
18	4.
21	100.
22	3.
23	$-\frac{8}{3}$.
25	342.
28	4.
29	1.
30	4.

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

La Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM, es una asociación civil sin fines de lucro fundada a finales del año 2000. Tiene como objetivos la promoción de la matemática entre los jóvenes en edad escolar, detectar aquellos que tienen gran interés por el estudio de esta ciencia y prepararlos de manera eficiente para la participación en competencias matemáticas nacionales e internacionales.
La ACM agrupa a profesores y matemáticos profesionales de varias universidades del país y tiene el apoyo de la Asociación Matemática Venezolana, AMV y la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. De esta manera en todas nuestras actividades disponemos de un personal altamente capacitado y de reconocido prestigio nacional e internacional.
Desde nuestra fundación hemos obtenido un total de 81 premios internacionales en las distintas competencias a las cuales hemos asistido, siendo los más importantes dos medallas de plata y dos de bronce en la 42° y 43° Olimpiada Internacional de Matemáticas, la Copa Puerto Rico y la Copa El Salvador. Estas copas son premios que se otorgan en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, y en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, OMCC, al país de mayor progreso académico en los dos últimos años de participación. Nosotros ganamos este premio en la XVI OIM, celebrada en Uruguay en septiembre de 2001 y en la VI OMCC celebrada en Nicaragua en Junio de 2004.
Internacionalmente participamos en las siguientes competencias:

- Olimpiada Internacional de Matemáticas. IMO.
- Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. OIM.
- Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. OMCC
- Olimpiada Bolivariana de Matemáticas. OBM.
- Olimpiada Matemática de Mayo. OMM.
- Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria. OIMU.

Para el año 2010 planificamos la organización de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM, dirigida a jóvenes de 7º grado hasta 2º del diversificado, y además colaboraremos con la Olimpiada Recreativa de Matemáticas, ORM, organizada por Fundecom. Ambas competencias son eventos masivos de promoción de las matemáticas y entre ellas participan alrededor de 150.000 estudiantes de todo el país comprendidos desde el tercer grado de Educación Básica, hasta el segundo año de Educación Media y Diversificada. Tanto la OJM como la ORM constan de tres pruebas, la preliminar o Canguro Matemático, la Final Regional y la Final Nacional. El Canguro Matemático es el concurso de matemáticas más grande del mundo y participan anualmente más de cinco millones de estudiantes de Europa, Canadá, Ecuador, Estados Unidos, México, Paraguay, Pakistán, Puerto Rico y Venezuela. La participación es por estricta invitación de la Asociación Canguro sin Fronteras, cuya sede está localizada en París, Francia, y el examen es elaborado por profesores de todos los países participantes y adaptado a las características de cada país.
Junto a estos eventos, llevamos adelante un programa nacional de entrenamiento de estudiantes que comienza en el último trimestre de cada año, su finalidad es preparar a los jóvenes que competirán en las olimpiadas internacionales antes señaladas. Este programa de entrenamiento se realiza en varias ciudades del país con el concurso de profesores y estudiantes de las siguientes universidades: UCV, USB, UNEXPO, UC, LUZ, UPEL-IPC, UCAB, ULA, UCOLA y el IVIC. Los estudiantes que participan como entrenadores, son jóvenes con experiencia en olimpiadas como competidores y son ganadores de premios en estas competencias. De esta manera vamos conformando una generación de relevo que comparte sus conocimientos y experiencias con los nuevos estudiantes.
En el año 2010 las competencias internacionales en las cuales participaremos se llevarán adelante según el siguiente cronograma:

- Canguro. 18 de Marzo.
- XVI OMM. Mayo.
- XI OBM. Junio.
- XII OMCC. 25 de Mayo al 1 de Junio. San Juan de Puerto Rico.
- 51ª IMO. 2 al 12 de Julio. Astana, Kazakhstan.
- XXIV OIM. Septiembre. Asunción. Paraguay.

Para mayor información se puede consultar nuestra página en la WEB: http://www.acm.org.ve
Una pequeña aclaratoria sobre el calendario que usted tiene en sus manos. El mismo ha sido pensado como un medio de promoción de las matemáticas y pretende ser una ayuda para las actividades de aula de maestros y profesores. Cada día laborable de la semana tiene un problema de matemáticas y al final se encuentran las respuestas a los mismos. Es importante notar que en la parte superior de cada página, aparecen las siglas, ORM u OJM, eso indica el nivel de los problemas que ahí aparecen.
Finalmente, la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, como un homenaje póstumo, quiere ofrecer este calendario al recuerdo del Dr. Diómedes Bárcenas, quien falleció el pasado mes de Noviembre. Diómedes era Profesor Titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes y siempre fue un gran colaborador de todas las actividades de nuestra Asociación. Siempre lo recordaremos como un excelente colega y gran amigo.

Rafael Sánchez Lamoneda

Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias.
Universidad Central de Venezuela.

OJM

	Julio
1	44 veces.
2	7.
6	25.
7	12.
8	990.
9	256 cm^2.
12	549120.
13	609.
14	7.
15	1050.
16	6.
19	168.
20	31.
21	$2\sqrt{3}$cm^2.
22	$768\sqrt{6}$ m^3.
23	18,2.
26	$5y+7$.
27	6.
28	1005.
29	998.
30	$\frac{2}{9}$.

	Agosto
2	1.
3	62.
4	5454.
5	20 %.
6	No es posible.
9	45.
10	5.
11	9.
12	5.
13	4.
16	1 hora.
17	28.
18	3.
19	110 grados.
20	45.
23	3.
24	88 %.
25	6.
26	36 grados.
27	2268.
30	9 y 6.
31	600.

	Septiembre
1	901.
2	26.
3	108 grados.
6	9.
7	-5.
8	10.
9	3.
10	72 grados.
13	$-\frac{5}{4} \leq a \leq \frac{5}{4}$.
14	62.
15	43,5.
16	6.
17	9.
20	60 u^2.
21	17.
22	1.
23	133.
24	-6.
27	15 grados.
28	420 %.
29	5.
30	Disminuyó 10 %.

	Octubre
1	25.
4	33.
5	3.
6	10.
7	16 grados.
8	28.
11	2.
13	3.
14	282.
15	8.
18	6.
19	88.
20	2.
21	121.
22	2.
25	39.
26	669.
27	4.
28	24.
29	81.

	Noviembre
1	11.
2	19.
3	63.
4	1.
5	3,5.
8	33.
9	$\frac{1}{2}$.
10	Ninguna.
11	8.
12	54.
15	53.
16	21.
17	8.
18	-5.
19	42.
22	4.
23	30 grados.
24	8.
25	$2S+n^2$.
26	1.
29	156.
30	-7.

	Diciembre
1	84.
2	6.
3	0.
6	16.
7	1.
8	7^4.
9	1.
10	1.
13	12.
14	3.
15	1.
16	$\frac{1}{8}$.
17	Ninguno.
20	4013.
21	0,011.
22	2025.
23	6560.
24	Infinitas.
27	5.
28	504.
29	14.
30	6.
31	640.