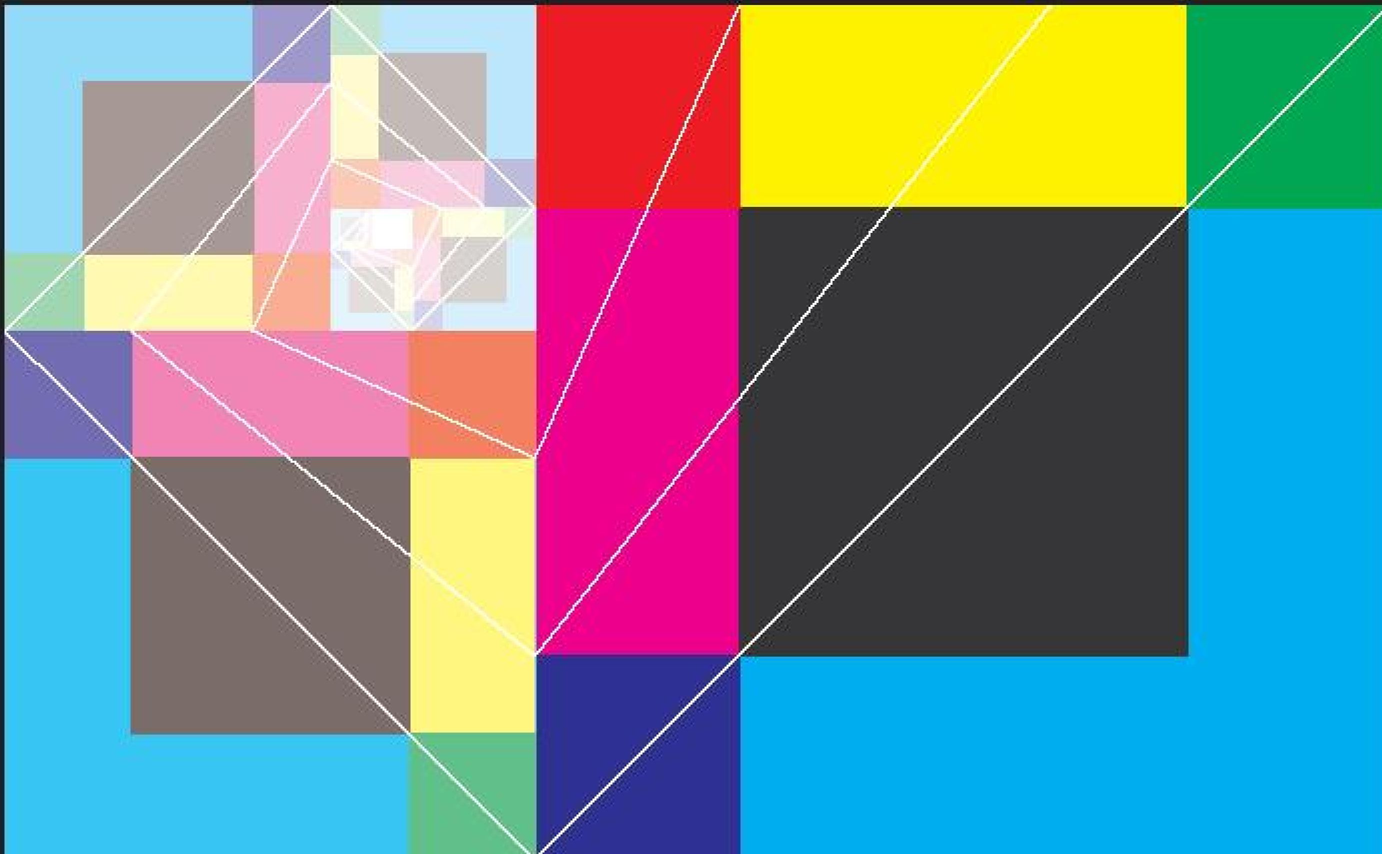
CALENDARIO



MATEMÁTICO 2009

OJM

ENERO 2009

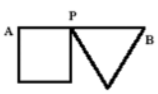
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes

1 *Para Thales... la cuestión primaria no era qué sabemos, sino cómo lo sabemos.*

Aristóteles

2 Se lanza un dado dos veces. Hallar la probabilidad de que se obtenga por lo menos un 2.

5 El segmento AB mide 21 cm de longitud. El punto P se coloca de forma que el cuadrado y el triángulo equilátero tengan el mismo perímetro. ¿Cuánto mide el segmento AP?



6 ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de 3 personas de un grupo de 20 si uno debe ser el presidente, otro el vicepresidente y el tercero el secretario?

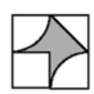
7 En una asociación, todos los miembros tienen derecho de votar por el presidente. El presidente actual fue electo con el doble de los votos recibidos por el otro candidato. Si se sabe que 3 miembros no votaron y que el presidente actual ganó con un 64 % de los votos de todos los posibles votantes, ¿Cuántos miembros hay?

8 Si cortamos las esquinas de un cubo por la mitad de las aristas obtenemos un poliedro llamado CUBOCTAEDRO. Si la arista del cubo mide 6 cm, calcule el área del CUBOCTAEDRO.

9 En una reunión hay 100 personas y la primera da la mano a una persona, la segunda da la mano a 2 personas, la tercera da la mano a 3 personas,..., la 99ª da la mano a 99 personas, ¿a cuántas personas da la mano la persona número 100?

12 Calcular el área de cada una de las cuatro partes del jardín circular de radio 16 metros.

13 Calcular el área de la parte sombreada, teniendo en cuenta que las dos curvas son cuartos de circunferencia y el cuadrado tiene lado 8 cm.



14 ¿Qué dígitos se han omitido en la siguiente multiplicación?

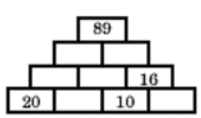
$$\begin{array}{cccc}
 & 2 & * & * \\
\times & & * & * \\
\hline
 & * & 6 & 1 \\
* & * & 4 & \\
\hline
* & * & 0 & 1
\end{array}$$

15 *Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay mas allá.*

Hipatía

16 Si fuera andando a 4 km/h llegaría 5 minutos tarde al colegio, pero como iré a 5 km/h llegaré 10 minutos antes de la hora de entrada. ¿A qué distancia está el colegio de mi casa?

19 Cada bloque vale la suma de los dos sobre los que se apoya. Completa los números que faltan.



20 Si haces la división de 1 entre 5^{2000}, ¿cuál será el último dígito que aparezca antes de llegar a puros 0's?

21 En un examen la teoría vale el 60 % y los problemas el 40 % de la nota final. Si Pedro tiene de nota final un 7 y sacó en los problemas un 5,125 ¿qué nota tuvo en la teoría?

22 En un hotel hay 2 pisos. En el primer piso hay 13 habitaciones y en el segundo 7. Tenemos una sola llave que abre 4 habitaciones del primer piso y 2 del segundo. Si sólo puedo intentar abrir una puerta, ¿en qué piso debo intentarlo para entrar en una habitación?

23 Hemos escogido seis cifras, 1, 3, 4, 7, 8, 9, y con ellas queremos formar dos números que tengan tres cifras cada uno, sin repetir ninguna cifra. ¿Cómo debemos formar estos dos números si queremos que tanto su suma como su producto sea el más grande posible?

26 Haciendo sumas, adecuadamente, con los números 5 y 7, se pueden obtener muchos números. ¿Cuáles números de dos cifras no puedes obtener?

27 Se sabe que el polinomio $p(x) = x^3 - x + k$ tiene tres raíces que son números enteros. Determínese el número k.

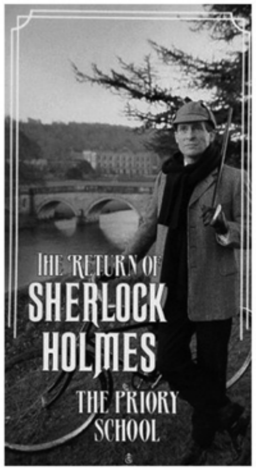
28 Ordena de forma creciente

$$2\sqrt[6]{2},\ \sqrt{5} \text{ y } \sqrt[3]{11}$$

29 Halla todos los pares de números naturales x, y $(x < y)$ tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1999.

30 Considérese la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determínense las dos últimas cifras de a_{2000}.

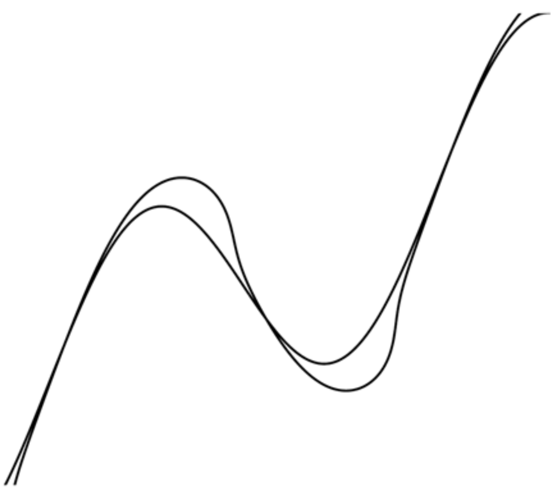
Trayectorias de una bicicleta



En *La aventura del Colegio Priory*, de Arthur Conan Doyle, Sherlock Holmes y su fiel amigo Watson encuentran las huellas dejadas por una bicicleta sobre la tierra húmeda. Entre ellos se suscita el siguiente diálogo:

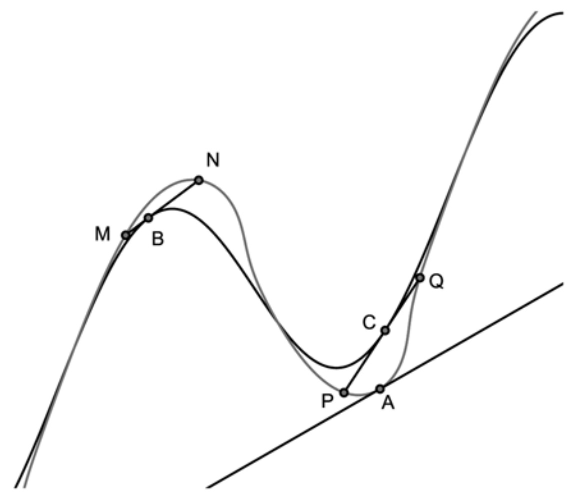
> —Esta huella, como puede usted ver, la ha dejado un ciclista que venía desde la zona del colegio.
> —O que iba hacia allí.
> —No, no, querido Watson. La impresión más profunda es, naturalmente, la de la rueda de atrás, que es donde se apoya el peso del cuerpo. Fíjese en que en varios puntos ha pasado por encima de la huella de la rueda delantera, que es menos profunda, borrándola. No cabe duda de que venía del colegio.

Como se ve, Sherlock Holmes utiliza su capacidad deductiva para inferir la dirección del movimiento de la bicicleta, a partir de algunos elementos físicos. Pero supongamos que el único dato fuesen las trayectorias de ambas ruedas, sin ninguna información adicional como la profundidad de las huellas, o si una de ellas pasa por encima de la otra. Por ejemplo en la figura siguiente se muestran las huellas dejadas por una bicicleta en una región de dimensiones aproximadas 10m×10m. ¿Será posible, mediante consideraciones puramente geométricas, determinar la dirección del movimiento?



Para responder la pregunta anterior recordemos que en una bicicleta sólo la rueda delantera puede cambiar de dirección, mediante la acción del manubrio. La rueda trasera, por construcción, se mueve siempre en dirección a la rueda delantera, a menos que patine o resbale sobre el piso (lo que se llama *derrapar*). Supongamos ahora que una bicicleta se mueve sobre el plano sin derrapar, y que $Q(t)$ y $P(t)$ son los puntos de contacto de las ruedas trasera y delantera con el plano en el instante t. Al variar t, los puntos $Q(t)$ y $P(t)$ describen dos curvas, que son las huellas de la rueda trasera y de la rueda delantera, respectivamente. Ahora bien, la dirección instantánea del movimiento de $Q(t)$ viene dada por la recta tangente a la huella, y como esa dirección va hacia la rueda delantera, se concluye que la recta tangente a la trayectoria de la rueda trasera en el punto $Q(t)$ debe pasar por el punto $P(t)$.

En la figura siguiente se muestran las mismas huellas, pero para mayor claridad hemos coloreado una de ellas de rojo. El razonamiento del párrafo anterior muestra que un punto como el A no puede pertenecer a la huella de la rueda trasera, pues la tangente a la trayectoria en ese punto no corta a la otra curva (o si la corta lo hace en un punto demasiado alejado para el tamaño de una bicicleta). Esto significa que la curva roja sólo puede ser la trayectoria de la rueda delantera, y por lo tanto la curva negra es la trayectoria de la rueda trasera.



Para finalizar, tracemos las tangentes en un par de puntos B y C de la curva negra (trayectoria de la rueda trasera). Cortando estas tangentes con la trayectoria de la rueda delantera, observamos que $BN = CQ$, mientras que $BM \neq CP$. Esto demuestra que el sentido del movimiento de la bicicleta fue de izquierda a derecha.

José Heber Nieto

Departamento de Matemáticas
Universidad del Zulia

ORM

FEBRERO 2009

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes

2 El Libertador Simón Bolívar murió el 17 de diciembre de 1830. ¿Cuántos años han transcurrido al 17 de diciembre de 2009?

3 María paga con un billete de Bs. 20 un objeto que cuesta Bs. 15. ¿De cuántas maneras distintas le pueden dar el vuelto utilizando sólo billetes y monedas de Bs. 1?

4 El número 35267 está escrito en un cartel de valores. El 2 ocupa el lugar de las decenas. ¿Qué lugar ocupa el 7?

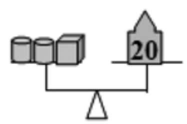
5 ¿Cuántos centímetros debemos añadir a 2,75 metros para tener 5 metros?

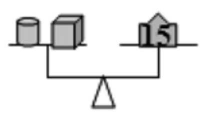
6 Dibuja un círculo y trázale tres rectas. ¿Cuál es el mayor número de partes en que se puede dividir el círculo?

9 Observa los precios de pedazos de cartulina:

¿Cuánto cuesta construir este paralelepípedo?

10 Si los pesos están medidos en gramos, ¿Cuánto pesa el cubo?

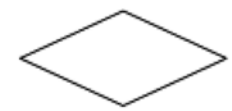




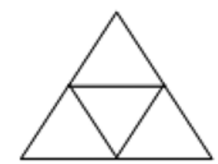
11 Hay que tostar en una parrilla tres rebanadas de pan. En la parrilla caben dos rebanadas a la vez, pero sólo se pueden tostar por un lado. Se tarda 30 segundos en tostar una cara de una pieza de pan, 5 segundos en colocar una rebanada, o en sacarla, y tres segundos en darle la vuelta. ¿Cuál es el mínimo tiempo que se necesita para tostar las tres rebanadas?

12 Ana coloca 6 fichas rojas redondas de radio 10 cm en la mesa de modo que cada ficha toque dos otras fichas sin superponerse y sus centros sean vértices de un hexágono regular. Luego, Ana nota que en el medio de las fichas hay suficiente espacio para introducir una ficha azul que toque el resto de las fichas sin superponerse. ¿Cuál es el radio de la ficha azul?

13 ¿Cuántas figuras como



puedes ver en esta otra figura



?

16 Calcula la diferencia entre el mayor número de tres cifras diferentes y el menor número de tres cifras diferentes.

17 Las dos quintas partes de un número es el doble de quince. ¿Cuál es el número?

18 En la expresión

$$19631 = 3 \times \mathrm{AMOR} + 2$$

¿qué dígito representa la letra A?

19 Los dos tercios de un listón equivalen a 12 cm. ¿Cuánto mide el listón?

20 ¿Cuál es el dígito en la posición de las centenas del menor número de cuatro dígitos diferentes?

23 *¿Por qué las cosas son como son y no de otra manera?*

Kepler

24 *Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto, y pensar lo que nadie más ha pensado.*

Szent-Györgi

25 Con seis fósforos puedes construir sólo un rectángulo. ¿Cuántos rectángulos puedes construir con 22 fósforos?

26 ¿Cuántos quintos constituyen dos unidades?

27 Se tienen 9 hojas de papel carta. Algunas de ellas se cortan en 4 partes y así tenemos en total 15 piezas de papel. ¿Cuántas hojas de papel se cortaron en 4 partes?

De visita por los vértices

A partir de un polígono regular de n lados, con n mayor que cuatro, considerando ciertos criterios muy sencillos, podemos construir un polígono regular estrellado de n puntas. Veamos cómo. Comencemos con un pentágono regular.
Para facilitar la construcción, numeremos sus vértices: 1, 2, 3, 4, 5 (figura 1). Tracemos el polígono cuyos vértices consecutivos son los puntos identificados con los números 1, 3, 5, 2, 4, 1 (nótese que avanzamos dos vértices o "saltamos de dos en dos " y todos los vértices están considerados). Partiendo del punto 1 llegamos al punto 1 y tenemos un fantástico polígono regular estrellado de cinco puntas (figura 2). Si lo coloreamos, queda como se muestra en la figura 3. Y si queremos una estrella, como las que tenemos en nuestra bandera, excluimos el pentágono interior (figura 4).

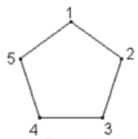


Figura 1

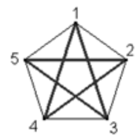


Figura 2

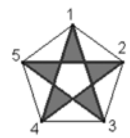


Figura 3

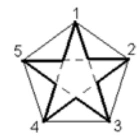


Figura 4

Aprovechemos el entusiasmo y construyamos otros polígonos de este tipo. ¿ Qué tal si tomamos ahora un octágono?. Ahí está, con sus vértices ya numerados en la figura 5. Esta vez, tracemos el polígono cuyos vértices consecutivos son los puntos denotados con los números 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 1 (vamos de "tres en tres" y todos los vértices entran en juego). En la figura 6, vemos un hermoso polígono regular estrellado de ocho puntas y en la figura 7 lo hemos coloreado. ¿Qué pasaría si uniéramos los vértices del octágono, a partir del 1, de dos en dos?. La secuencia sería: 1, 3, 5, 7, 1. No todos los vértices entran en juego. Si los tomamos de cuatro en cuatro: 1, 5, 1. De cinco en cinco: 1, 6, 3, 8, 5, 2, 7, 4, 1 (¡es el mismo polígono que el obtenido en el avance de tres en tres, pero recorrido en orden inverso!). De seis en seis: 1, 7, 5, 3, 1 (es el mismo del caso de dos en dos). Obviamente, de siete en siete, da el polígono original, al igual que si los tomamos uno a uno. La pregunta es: ¿Qué relación debe darse entre el número de lados del polígono original y la cantidad de vértices que se avanza para que, partiendo del vértice 1, se regrese al mismo, habiendo recorrido todos los vértices? Es momento de explicar lo que al principio quisimos decir con *"ciertos criterios muy sencillos"*. Hagamos un poco de historia. Los matemáticos Thomas Bradwardine (1290 - 1349), Johannes Kepler (1571 - 1630) y Ludwig Schläfli (1814 - 1895), entre otros, se dedicaron al estudio de los polígonos regulares estrellados. Gracias a sus trabajos sabemos que si tenemos un polígono regular de n lados, con n mayor que 4, sólo es posible recorrer todos los vértices de dicho polígono si el número n de lados y el número m de avances son primos relativos, es decir, si el máximo común divisor de n y m es 1 (algunos autores admiten $m = 1$, con lo cual el polígono original es también un polígono regular estrellado).

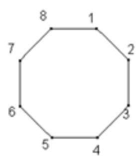


Figura 5

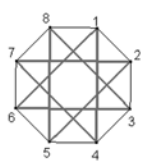


Figura 6

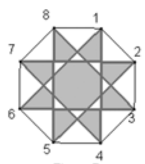


Figura 7

El procedimiento funciona con el pentágono regular porque el número de lados, $n = 5$, y el número de avances, $m = 2$, son primos relativos. En el caso del octágono, $n = 8$ y $m = 3$ y 8 y 3 son primos relativos. Existe una forma de representar los polígonos regulares estrellados, llamada notación de Schläfli: $\left\{\frac{n}{m}\right\}$ (entre llaves, una fracción cuyo numerador es el número de lados y cuyo denominador es el número de avances). Así, el polígono de la figura 2 se denota por $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ y el de la figura 6 por $\left\{\frac{8}{3}\right\}$. Nótese que 8 y 5 también son primos relativos, pero el polígono regular estrellado $\left\{\frac{8}{5}\right\}$ coincide con el $\left\{\frac{8}{3}\right\}$, como ya lo comentamos. Esta propiedad también está establecida: si n y m son primos relativos entonces los polígonos regulares estrellados $\left\{\frac{n}{m}\right\}$ y $\left\{\frac{n}{n-m}\right\}$ coinciden. Así, por ejemplo, si tenemos un eneágono regular, $n = 9$, ¿cuáles son los polígonos regulares estrellados que se generan? Los números que son primos relativos con 9, mayores que 1 y menores que 9 son: 1, 2, 4, 5, 7 y 8. Puesto que $\left\{\frac{9}{2}\right\}$ coincide con $\left\{\frac{9}{7}\right\}$, así como también son iguales $\left\{\frac{9}{4}\right\}$ y $\left\{\frac{9}{5}\right\}$; $\left\{\frac{9}{1}\right\}$ y $\left\{\frac{9}{8}\right\}$ son iguales y coinciden con el polígono original. Se concluye que un eneágono regular genera dos polígonos regulares estrellados distintos del polígono original, a saber, el $\left\{\frac{9}{2}\right\}$ y el $\left\{\frac{9}{4}\right\}$. En la figura 8 se ilustran tales polígonos. En la siguiente figura (fig. 9), mostramos los polígonos $\left\{\frac{7}{2}\right\}$, $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ y $\left\{\frac{12}{5}\right\}$.

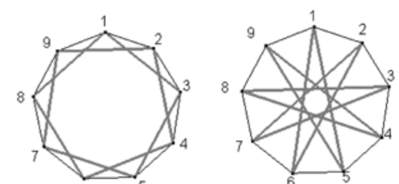


Figura 8

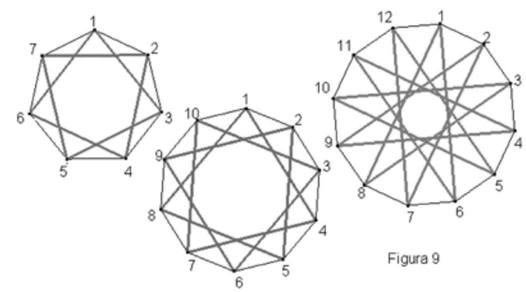


Figura 9

Volvamos al caso del octágono. Sabemos que al tomar los vértices, a partir del 1, de dos en dos, la secuencia es 1, 3, 5, 7, 1. Si tomamos el primer punto no conectado, el 2, y seguimos el mismo patrón (de dos en dos), la secuencia es 2, 4 , 6, 8, 2. Al hacer el trazado obtenemos una figura que recibe el nombre de estrella (no polígono regular estrellado). (Fig. 10). (Algunos autores admiten la notación de Schläfli también para ellas)

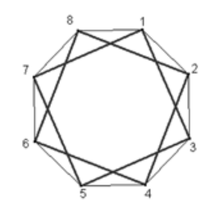


Figura 10

Un detalle interesante es la fórmula que nos permite calcular la medida del ángulo en la punta de un polígono regular estrellado. Dado el polígono regular estrellado $\left\{\frac{n}{m}\right\}$ la medida del ángulo en cualquiera de sus puntas es $180 \cdot \frac{\frac{n}{m}-2}{\frac{n}{m}}$. (¡como para practicar operaciones con fracciones!). Por ejemplo, en el polígono regular estrellado $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, la medida del ángulo en la punta es 36 y en el caso del polígono regular estrellado $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ la medida del ángulo en la punta es 45.

Fabiola Irene Czwienczek Müller

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico de Maracay

OJM

MARZO 2009

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 ¿Cuántas letras mínimo debería tener el alfabeto para que un millón de personas diferentes se pueda identificar con iniciales de dos o tres letras?	**3** Hallar todos los números enteros positivos n tales que 3^n+5^n es múltiplo de $3^{n-1}+5^{n-1}$.	**4** En una balanza de dos platillos comprobamos que tres cubos y una pelota se equilibran con doce metras. En una segunda pesada vemos que la pelota sola se equilibra con un cubo y ocho metras. ¿Cuántas metras habrá que poner en un platillo para equilibrar la pelota en el otro platillo?	**5** Si cortamos las esquinas de un cubo por la mitad de las aristas obtenemos un poliedro llamado CUBOCTAEDRO. Si la arista del cubo mide 6 cm, calcule su volumen. 	**6** Halla el número natural n que es el producto de los primos p, q y r, sabiendo que $r-q=2p$ y $rq+p^2=676$.
9 Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuantos segmentos que unen pares de vértices del poliedro no son aristas ni están contenidos en una cara?	**10** Un matrimonio tiene hijos de tres edades diferentes. El mayor es todavía menor de edad y sus años son múltiplos de seis. El más pequeño será el primero en celebrar su cumpleaños y cumplirá la mitad de los que tiene el mayor. La suma de las edades de los tres hijos es 28. ¿Cuántos hijos tienen y de qué edades?	**11** Los números naturales 22, 23, y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares. ¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad?	**12** En el triángulo ABC, se trazan la bisectriz interior AL (L en BC), la altura BH (H en AC) y la mediana CM (M en AB). Se sabe que los ángulos $\angle CAL, \angle ABH, \angle BCM$ son iguales. Determinar las medidas de los ángulos del triángulo ABC.	**13** Determinar todas las ternas de números reales (a,b,c), con $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$, tales que las parábolas $y=ax^2+bx+c$ y $y=bx^2+cx+a$ tienen el mismo vértice.
16 En una clase hay 9 niños y 13 niñas. Si la mitad de los estudiantes de la clase están resfriados, ¿al menos cuántas niñas están resfriadas?	**17** Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción del pastel original quedó después de cortar tres veces?	**18** Un saco está lleno de metras de 20 colores distintos. Al azar se van sacando metras del saco. ¿Cuál es el mínimo número de metras que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 metras del mismo color?	**19** A una cantidad le sumo su 10 %, y a la cantidad así obtenida le resto su 10 %. ¿Qué porcentaje de la cantidad original me queda?	**20** La suma de tres números impares consecutivos es igual a 27. ¿Cuál es el número más pequeño de esos tres?
23 Utilizando cada una de las cifras 1, 2, 3 y 4 se pueden escribir diferentes números, por ejemplo, podemos escribir 3241. ¿Cuál es la diferencia entre el más grande y el más pequeño de los números que se construyen así?	**24** Rafael tiene 10 cartas, con exactamente los números 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53 y 68 escritos en ellas. ¿Cuál es el menor número de cartas que puede él elegir para que la suma de las escogidas sea 100?	**25** $99-97+95-93+\ldots+3-1=$	**26** Una sala de cine tiene 26 filas con 24 asientos cada una. El total de los asientos se numera de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila y hacia atrás. ¿En qué número de fila está el asiento número 375?	**27** El boleto de entrada al Palacio de las Ciencias cuesta 5 pesos por niño y 10 pesos por adulto. Al final del día 50 personas visitaron el Palacio y el ingreso total de las entradas fue de 350 pesos. ¿Cuántos adultos visitaron el Palacio?
30 A un cuadrado de papel se le cortan todas las esquinas ¿Cuál es el máximo número de esquinas que puede quedar?	**31** Si se tiene $$x^2yz^3=7^3 \text{ y } xy^2=7^9,$$ entonces $xyz=$			

Préstamos con interés

Bartolo, que casi siempre es un Banco, acepta prestar a Daniel, el deudor, una suma A de dinero que Daniel debe cancelarle en N cuotas de igual monto p a un interés fijo del $c\,\%$.
Queremos dilucidar la relación aritmética entre estas cantidades y la estructura de la deuda a cada pago. La premisa fundamental de la operación (regla del juego) es que cada pago p cancela el interés sobre *el saldo deudor* y el resto (de p) amortiza la deuda, de modo tal que, *al último pago, la deuda queda amortizada en su totalidad.* Es lo que se llama en la jerga bancaria un "préstamo con intereses sobre saldos deudores".
Supongamos, como es usual, que los pagos son mensuales.
Así pues, en el mes n, el pago p se descompone en

$$p = x_n + y_n \tag{1}$$

donde x_n paga el interés sobre *el saldo deudor* e y_n *amortiza* la deuda restante.
Se infiere que, para $n > 1$,

$$x_n = c\left(A - \sum_{k=1}^{n-1} y_k\right) \tag{2}$$

Ahora bien, a esta expresión (2) restemos

$$x_{n+1} = c\left(A - \sum_{k=1}^{n} y_k\right)$$

para obtener

$$x_n - x_{n+1} = c\,y_n \tag{3}$$

pero, en virtud de (1),

$$x_n - x_{n+1} = (p - x_{n+1}) - (p - x_n) = y_{n+1} - y_n$$

de modo que, sustituyendo en (3), se infiere

$$y_{n+1} = (1 + c)\,y_n \tag{4}$$

Ahora bien, (4) indica que la sucesión $\{y_n\}$ es una *progresión geométrica* y por tanto

$$y_n = (1 + c)^{n-1}\,y_1 \tag{5}$$

Pero $x_1 + y_1 = p$ y $x_1 = cA$, o sea que $y_1 = p - cA$ y sustituyendo en (5) obtenemos

$$y_n = (p - cA)(1 + c)^{n-1} \tag{6}$$

y, gracias a (1),

$$x_n = p - (p - cA)(1 + c)^{n-1} \tag{7}$$

Por último, nótese que al pago N la deuda queda cancelada, es decir, el saldo deudor se extingue, de modo que, en un siguiente (y ficticio) pago $N + 1$, la parte x_{n+1} del interés es cero; vale decir (aplicando (7)),

$$0 = p - (p - cA)(1 + c)^N$$

de donde, despejando p, se concluye

$$p = cA\left[\frac{(1 + c)^N}{(1 + c)^N - 1}\right] \tag{8}$$

La fórmula (8) expresa la relación aritmética que vincula el préstamo A, el interés c, el pago *mensual* p y, desde luego, el número de cuotas N. En (8) aparece despejado p porque es la incógnita más frecuente, conocidos A, c y N. Desde luego que (8) sirve para calcular cualquiera de estas cuatro variables, conocidas las otras tres. A se calcula fácilmente, lo mismo que N, empleando logaritmos; pero en el caso de c es preciso aplicar técnicas de cálculo numérico para resolver una ecuación polinómica de grado $N + 1$.
Al final, Daniel habrá pagado a Bartolo una suma Np y unos intereses por el monto de $Np - A$.
Otros cálculos que pueden interesar, al cabo de hacer el pago p en el *mes* n, es el interés pagado x_n en (7); la amortización de la deuda y_n en (6); o bien, cuánta deuda falta por pagar:

$$A - \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{x_{n+1}}{c}$$

aplicando (2) y luego (7).
Veamos un ejemplo.
Bartolo le presta $A =$ Bs 30.000 a Daniel, a cancelar mediate iguales cuotas mensuales en 3 años ($N = 3\times 12 = 36$) y a un interés del 15 % anual. Aquí, $c = 15/1200 = 0,0125$.
Aplicando la fórmula (8), Daniel pagará la cuota de $p =$ Bs 1039,96 mensuales. Al cabo de los tres años, Daniel habrá cancelado su deuda y pagado un total de $Np - A =$ Bs 7.438,55 en intereses.
Si no se consideran los intereses sobre saldos deudores, sino siempre sobre el total del préstamo, Daniel tendría que haber pagado

$$\frac{3 \times 30{,}000 \times 15}{100} = \text{Bs } 13{,}500$$

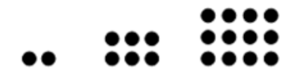
en intereses. Nótese la diferencia, casi el doble, tienta llamarlo usura.

Ignacio L. Iribarren

Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales
y Universidad Simón Bolívar

ORM

ABRIL 2009

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		1 ¿De cuántas maneras diferentes es posible ordenar las letras R, U, E, D, A de tal forma que no hayan consonantes consecutivas?	**2** En un rectángulo de área 150m^2, la base es $\frac{3}{2}$ de la altura, ¿Cuál es el valor del perímetro?	**3** Observa la secuencia de figuras:  ¿Cuántos círculos negros tiene la sexta figura?
6 *No podemos resolver problemas usando el mismo tipo de pensamiento que usamos cuando los creamos.* **Einstein**	**7** *Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, por mucho, la mitad mejor.* **Leibnitz**	**8** *El olvido de las Matemáticas perjudica a todo el conocimiento, ya que el que las ignora no puede conocer las otras ciencias ni las cosas de este mundo.* **Bacon**	**9** *El genio es un uno por ciento de inspiración, y un noventa y nueve por ciento de transpiración.* **Edison**	**10** *La Matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las Matemáticas.* **Gauss**
13 Entre Carmen y Ana tienen diez mangos, pero Carmen tiene dos mangos más que Ana. ¿Cuántos mangos tiene Carmen?	**14** Las filas y las columnas de un tablero de ajedrez de 8x8 se numeran del 1 al 8. Mauricio coloca en cada casilla, tantas fichas como la suma de los números de la fila y la columna de esa casilla. ¿Cuántas fichas colocó Mauricio?	**15** Cada hora, la fortuna de Luisito aumenta en un 50 %. Si un día al mediodía Luisito tiene 64 bolívares, ¿Cuántos bolívares tendrá a las 4 de la tarde?	**16** De los 200 estudiantes de bachillerato de un liceo, 150 participan en las olimpiadas de matemáticas y 130 en las de física. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, participan en ambas olimpiadas?	**17** Considere todos los números de 4 dígitos compuestos de los dígitos 3, 4, 6 y 7. Organizados en cualquier orden y que ninguno se repita, ¿cuántos de estos números son divisibles por 44?
20 Andrea tiene exactamente el dinero para comprar un caramelo de 13 centavos para cada compañero de clase. Como el precio de éstos bajó a 10 centavos, Andrea pudo comprar 6 más de lo planeado usando todo el dinero que tenía. ¿Cuántos compañeros de clase tiene Andrea?	**21** Mientras Laura lee un libro, se da cuenta que el número de la página que está leyendo es divisible por 3, 4 y 5. ¿Cuál es el dígito de la unidades de la siguiente página?	**22** Simón escribe el número 3 en el pizarrón, luego lo borra y lo reemplaza por su cuadrado, 9; luego lo borra y lo reemplaza por su cuadrado, 81 y así repite su experimento 2009 veces: cada vez reemplaza el número con su cuadrado. ¿Cuál es el dígito que se encuentra en las unidades del último número escrito?	**23** El cuádruple de una fracción es $3\frac{1}{5}$. ¿Cuál es la fracción?	**24** Luis quiere comprar un televisor por Bs 800 en la tienda A. En la tienda B venden el mismo televisor un 15 % más barato que en la tienda A, y además le hacen un 10 % de descuento a todos aquellos llamados Luis. ¿Cuánto le costaría el televisor a Luis en la tienda B?
27 En la sustracción, las letras representan dígitos diferentes. $\begin{array}{r} 8\;5\;4\;2 \\ -\,2\;B\;A\;C \\ \hline D\;6\;4\;5 \end{array}$ Determina A + B + C + D.	**28** Las diagonales de un rombo se encuentran a razón de 3:4 y su suma es 56 cm. ¿Cuál es el perímetro del rombo?	**29** ¿Cuántos múltiplos de 3 mayores o iguales a 2000 y menores o iguales a 4000 existen?	**30** Se tiene una caja con metras. María dice ”Hay un total de tres metras en la caja y todas son negras”. Lucas dice ”Hay dos metras negras y dos metras rojas en la caja”. Jorge dice ”Sólo hay metras negras en la caja”. Si uno sólo miente ¿Cuántas metras hay en la caja?	

Paradojas

Puede definirse paradoja como la situación en la que una afirmación contradice un conjunto de principios o verdades establecidas en un sistema de conocimiento dado.

El entendimiento ha puesto una barrera para impedir el surgimiento de las paradojas estableciendo de antemano su rechazo via el principio de no contradicción. Una afirmación y su negación se oponen y no pueden ser verdad al mismo tiempo.

Zenón. Entre las paradojas más famosas destacan las de Zenón, que cuestionan nuestra concepción del espacio y el tiempo como continuos infinitamente divisibles.

Aquiles y una tortuga van a una carrera y como Aquiles es más veloz que la tortuga, le da cierta ventaja. Zenón asegura que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga ya que antes de recorrer una distancia Aquiles debe recorrer primero la mitad de esa distancia y luego un cuarto y asi sucesivamente. En el tiempo en el que Aquiles ha recorrido una distancia la tortuga tambien ha avanzado un tanto y así nunca podra alcanzarla.

Sabemos por experiencia que Aquiles o cualquier persona alcanzará a la tortuga hasta caminando. Las matemáticas salen rápidamente de la situación alegando que la suma de los términos de la progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ es 1 y por tanto es posible recorrer una distancia y Aquiles alcanzará a la tortuga. Usualmente se argumenta que Zenón no sabía sumar progresiones geométricas pero yo lo dudo ya que los mesopotámicos conocían la suma de las primeras diez potencias de 2.

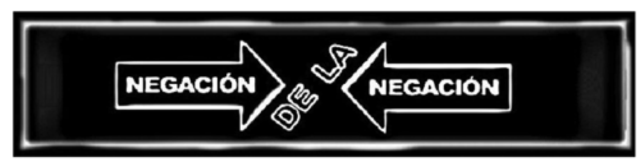
Hay quien sostiene que Zenón lo que dice es que la division infinita no tiene sentido, que es un absurdo puesto que llega un momento en que la division tiene que parar, digamos en el átomo geometrico o en el átomo temporal. Luego, si se suma una cantidad por muy pequeña que sea infinitas veces siempre se obtendra el infinito. Por tanto Zenon nos revela algo contradictorio en nuestra concepción de espacio y tiempo: La division infinita debe concluir en algo que tiene un tamaño. La división infinita no puede terminar en el vacío, la nada. O, ¿si puede? Pero en este caso, ¿cómo reconstruir el espacio y el tiempo a partir de la nada? En ambos casos la división infinita es contradictoria, es finita, termina.

En mi opinión el propio Zenón da la clave para la solución de su paradoja ya que desde el comienzo admite que la velocidad de Aquiles es mayor que la de la tortuga. Esto significa que en un tiempo determinado Aquiles recorre mayor distancia que la tortuga y por tanto en la suma de tiempos, la suma de las distancias recorridas por Aquiles será mayor que la recorrida por la tortuga, de manera que Aquiles la alcanzará. Por otra parte Aquiles y la tortuga están separados. Esto no sería posible. Pero este es sólo un aspecto de la paradoja. Creo que lo esencial a ella es la relación entre infinita divisibilidad y continuidad.

El filósofo cretense, o el mentiroso. Otra de las paradojas más famosas es la del mentiroso. Este es un filósofo de Creta que dice que todos los cretenses son mentirosos. Si dice la verdad miente y si miente entonces dice la verdad. El analisis lógico establece que P es verdad si y solo si P es falso.

Consideremos ahora la proposicion *Siempre digo la verdad.* ¿Cuál es su valor de verdad? Ella no es inherentemente contradictoria, tampoco es una tautología.

Las proposiciones: ***Siempre miento*** y ***siempre digo la verdad*** no son opuestas. Una no es la negación de la otra aunque lo aparenten. La negación de la proposición ***siempre digo mentiras*** es: ***algunas veces digo verdades***. Algo análogo ocurre con la proposición ***Siempre digo verdades***. Su negación es : ***Algunas veces miento***.



Este análisis permite afirmar que la negación de una paradoja no es necesariamente una paradoja y a la vez que el analisis de su negación arroja poca luz sobre la paradoja en sí, ya que se puede obtener una proposición que no es autocontradictoria. [1]

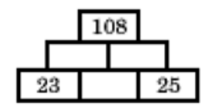
Alexis Rodríguez G.

Instituto Pedagógico de Caracas
Universidad Pedagógica Experimental Libertador

[1]Rucker Rudy: The infinity and the Mind. Princeton University Press, 1982
Sainsbury R. M. Paradoxes. Cambridge University Press, 1995

OJM

MAYO 2009

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				1 *La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.* **Descartes**
4 Calcular el perímetro de cada una de las cuatro partes del jardín circular de radio 16 metros. 	**5** En una carrera de cien metros planos participan cinco atletas y se conceden tres medallas: una de oro, plata y bronce para primero, segundo y tercer clasificados, respectivamente. Si no se tiene en cuenta cómo llegan a la meta el resto de los participantes, ¿cuántos resultados distintos puede tener la carrera?	**6** Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo. Está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad?	**7** Cada bloque vale la suma de los dos sobre los que se apoya. Completa los números que faltan. 	**8** Dadas cuatro líneas diferentes, ¿cuántos puntos de intersección NO puede haber entre ellas?
11 En un concurso de baile los jueces califican a los competidores con números enteros. El promedio de las calificaciones de un competidor es 5.625 ¿Cuál es el número mínimo de jueces para que eso sea posible?	**12** Una caja está llena de chocolates en forma de cubo. Sara se comió todos los del piso de arriba, que eran 77. Después se comió 55, que eran los que quedaban en un costado. Luego, los que quedaban enfrente. ¿Cuántos chocolates sobraron en la caja?	**13** El producto de tres enteros positivos es 1500 y su suma es 45. ¿Cuál es el mayor de esos tres números?	**14** Una pedazo rectangular de piel mágica se reduce a la mitad de su longitud y a la tercera parte de su ancho después de cumplirle un deseo a su dueño. Después de tres deseos tiene un área de 4 cm^2. Si su ancho inicial era de 9 cm, ¿cuál era su largo inicial?	**15** En un campamento de verano 96 niños van a separarse en grupos de forma que cada grupo tenga el mismo número de niños. ¿De cuántas maneras puede hacerse la separación si cada grupo debe de tener más de 5 pero menos de 20 niños?
18 Tomando tres vértices cualesquiera de un cubo se forma un triángulo. Del total de triángulos que pueden formarse de esa manera, ¿cuántos son equiláteros?	**19** ¿Cuánto es la suma de las cifras del número $N = 10^{92} - 92$?	**20** A Julio le dieron el número secreto de su nueva tarjeta de crédito, y observó que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es la tercer cifra de su número secreto?	**21** Alicia va al club cada día; Beatriz va cada 2 días; Carlos va cada 3; Daniel cada 4; Enrique cada 5; Francisco cada 6 y Gabriela cada 7. Si hoy están todos en el club, ¿dentro de cuántos días será la primera vez que vuelvan a reunirse?	**22** La maestra distribuyó la misma cantidad de dulces entre cada uno de 5 niños y se quedó tres para ella misma. No se acuerda cuántos dulces tenía, pero se acuerda que era un múltiplo de 6 entre 65 y 100. ¿Cuántos dulces tenía?
25 Se tienen dos círculos con centro en el mismo punto, pero cuyos perímetros difieren en 1 cm. ¿Cuál es la diferencia entre sus radios?	**26** Se escriben en sucesión todos los números del 1 al 2009, en orden, uno a continuación del otro, para formar un número muy grande que llamaremos G (es decir, G=1234567891011...20082009) ¿Cuál es la cifra central de G?	**27** El resultado de la operación siguiente $1-2-3+4+5-6-7+8+\ldots-2006-2007+2008+2009$ es	**28** ¿Cuántas parejas de enteros positivos (a, b) satisfacen $a^2-b^2=15$?	**29** El número -1 es solución de la ecuación de segundo grado $3x^2+bx+c=0$. Si los coeficientes b y c son números primos, el valor de $3c-b$ es

El azar en la escuela: ¿cómo enseñarlo?

La frase *Alea jacta est* fue pronunciada por el insigne Julio César al pasar el Rubicón, y significa *la suerte está echada*. Es muy común en el lenguaje cotidiano oir frases que involucren la palabra *suerte*; y ella está vinculada con la noción de *azar*; la cual el diccionario define como **casualidad**. Y así, la frase *echar a suertes* no significa otra cosa que resolver una cosa por medio del azar. En nuestro complejo mundo de hoy muchos son los fenómenos que dependen del azar. Pero, ¿qué es el azar? Existen diversas concepciones acerca de esta noción. Poincaré decía que era *la medida de nuestra ignorancia*. Los fenómenos más cercanos dependientes del azar son ciertos juegos: los llamados juegos de azar. En ellos intervienen elementos diversos como monedas, cartas, dados, ruletas, etc.

De hecho, el estudio sistemático del azar estuvo motivado por estos juegos y condujo al desarrollo de la teoría de las probabilidades, aunque ya con anterioridad muchos filósofos como Aristóteles le habían prestado atención a esta idea. En nuestro currículum escolar, desde hace algún tiempo, se han incorporado algunas nociones vinculadas con el estudio del azar. Así, a efectos de trabajar con los alumnos estos contenidos son de gran utilidad los materiales concretos: monedas, cartas, dados; y el diseño de actividades de enseñanza/aprendizaje, que no sólo abarquen el aspecto lúdico, sino que desarrollen en el estudiante, a través de la experimentación y la discusión conceptual, la noción de probabilidad, sus propiedades y algunas de sus aplicaciones.

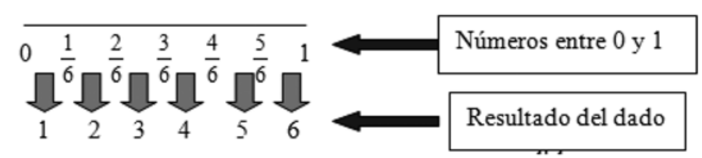
Otra herramienta útil lo constituye la calculadora. Usualmente ellas traen una tecla la cual **simula** la escogencia al azar de números comprendidos entre 0 y 1, seleccionados con igual probabilidad. En el modelo que tenemos a mano esta tecla está etiquetada como RAN#. La simulación es, justamente, una técnica ampliamente utilizada para el desarrollo de modelos matemáticos. Veamos algunos ejemplos de simulación empleando la calculadora. Tenga en cuenta amigo lector que si usted repite el experimento, en general, obtendrá valores diferentes a los que aquí mostramos: justamente porque dichos valores están escogidos al azar. Supongamos que queremos simular una moneda legal: esto es, una para la cual hay la misma probabilidad de que aparezca cara o de que aparezca sello: =0,5. Bueno, para ello podemos asumir un criterio de asignarle cara, C, cada vez que el número resultante (al oprimir la tecla RAN#) en la calculadora esté entre 0 y 0,5; y considerar que obtuvimos un sello, S, cuando el número resultante sea mayor que 0,5 y menor que 1. Simulemos seis (6) lanzamientos de una moneda legal.

Valor obtenido con la tecla RAN#	Lado de la moneda correspondiente
0,450	CARA (C)
0,302	CARA (C)
0,309	CARA (C)
0,984	SELLO (S)
0,925	SELLO (S)
0,466	CARA (C)

En el experimento realizado, cuyos resultados se muestran en la primera tabla, se obtuvo la secuencia: C-C-C-S-S-C. No hay nada que impida que el criterio se hubiese escogido a la inversa, esto queda a gusto del usuario. Más aún, podríamos haber considerado que si el valor observado en la calculadora estaba entre 0,25 y 0,75 ello equivalía a haber observado una cara; y si hubiésemos obtenido valores, o bien entre 0 y 0,25, o bien entre 0,75 y 1 ello significaba haber observado un sello. Lo importante es que el intervalo de valores posibles para cada caso tenga por longitud $\frac{1}{2} = 0,5$; lo cual es el valor de la probabilidad asignado a cada caso. ¿Cómo haríamos si la moneda no fuese legal? Pongamos por caso una moneda trucada para la cual la probabilidad de aparición de cara es 0,4; y la de sello, 0,6. En este caso seguimos un razonamiento similar: asignamos un intervalo de longitud 0,4 a la aparición de caras y un intervalo de longitud 0,6 a la de los sellos. Por ejemplo, podemos considerar que si el número observado en la calculadora se encuentra entre 0 y 0,4 hemos observado una cara; y un sello en caso contrario. Hagamos un experimento simulando 6 lanzamientos de la moneda:

Valor obtenido con la tecla RAN#	Lado de la moneda correspondiente
0,142	CARA (C)
0,203	CARA (C)
0,327	CARA (C)
0,350	CARA (C)
0,799	SELLO (S)
0,830	SELLO (S)

En este caso obtuvimos la secuencia: C-C-C-C-S-S, como se observa en la segunda tabla. Nuevamente debemos insistir que bastaba tomar cualquier intervalo de longitud 0,4 para asignarlo a las caras. Así, podría haber sido el intervalo que va de 0,3 a 0,7. Si este hubiese sido el criterio, y tomando los mismos números generados por la calculadora tendríamos como resultado la secuencia: S-S-C-C-S-S. Siguiendo las mismas ideas que venimos desarrollando: ¿Cómo se puede simular un dado legal? En este caso cada número del dado tendría la misma probabilidad: $\frac{1}{6} \approx 0,166$.



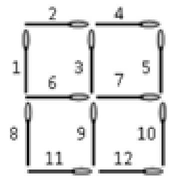
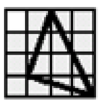
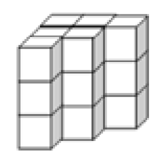
Así, por ejemplo, para valores obtenidos mediante la tecla RAN# comprendidos entre $\frac{2}{6} \approx 0,333$ y $\frac{3}{6} = 0,5$ ello representa el que hubiésemos observado la cara del dado con el número 3. Le dejamos a usted, estimado lector, el que realice esta experiencia.

Walter O. Beyer K.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional Abierta

ORM

JUNIO 2009

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 En la adición las letras representan dígitos diferentes. $\begin{array}{r} A\,M\,O\,R \\ +\ R\,O\,M\,A \\ \hline 5\,5\,5\,5 \end{array}$ Calcula A + M + O + R	**2** ¿Cuáles fósforos debes quitar para que sólo se vean tres rectángulos? 	**3** Un niño gasta 100 bolivares en dulces de 1, 4 y 12 bolivares. ¿Cuántos dulces serán del tipo de 12 bolivares si en total ha comprado 40 dulces?	**4** La bicicleta de Andrés tiene la rueda delantera de 4 metros de circunferencia y la trasera de 5 metros de circunferencia. ¿Cuántas vueltas más dio la rueda delantera que la trasera mientras que Andrés recorrió 400 metros?	**5** En la nevera hay mantequilla y mayonesa, jamón y mortadela, queso fresco y queso manchego, tomate y lechuga. Me quiero hacer un sandwich untando ambas rebanadas de pan con la misma sustancia y que en su interior tenga un fiambre, un queso y un vegetal. ¿De cuántas maneras puedo hacerlo?
8 Tomando como unidad de superficie el cuadrado pequeño, calcula el área del triángulo. 	**9** Con una balanza de platillos se puede pesar desde 1 hasta 13 kg utilizando solamente tres pesas A, B y C. Indica de cuántos kg han de ser las pesas A, B y C.	**10** Según afirma una noticia periodística el 20 % de la humanidad dispone del 80 % de la riqueza mundial. Suponiendo que la afirmación es cierta ¿Cuántas veces es más rica una persona incluida en este 20 % que otra del resto de la humanidad?	**11** En un pueblo de 2.550 habitantes, 3 personas se enteran de una noticia a las 8 h. de la mañana. Cada persona comunica este hecho a tres nuevas al cabo de media hora. ¿A qué hora conocerá el rumor la totalidad del pueblo?	**12** Paola compró un artículo con un 15 % de descuento del precio oiginal por Bs. 106,25. ¿Cuál era el precio original?
15 Dos cometas se acercan al Sol, uno cada 100 años y otro cada 75 años. Si los dos se han aproximado al Sol en 1990, ¿cuándo se volverán a encontrar por primera vez?	**16** En un garaje, entre autos y motos hay 20 vehículos. Sabiendo que el número total de ruedas es 70, ¿cuántos autos hay?	**17** Cuando nos cruzamos casualmente en la calle con dos de las hermanas García, en uno de cada dos casos ambas tienen los ojos azules. ¿Puedes determinar el número de hermanas García?	**18** En cierto país la unidad monetaria se denomina "biyu", y la legislación establece que los ciudadanos han de pagar como impuesto a sus ganancias un porcentaje igual al número de biyus que ganan por semana. ¿Cuál sería la ganancia semanal ideal para un habitante de este país?	**19** Al numerar las páginas de un libro usamos las cifras del 0 al 9. ¿Cuántas páginas tendrá el libro, si al paginarlo se han empleado 678 cifras?
22 Si sumamos las páginas de dos libros obtenemos el número 356. El formato del primero es 20 x 15 cm y el del segundo libro 17 x 15 cm. Si se extendiesen las hojas de los dos libros, cubrirían una superficie de 4,9080 m2. ¿Cuántas páginas tiene cada libro?	**23** Tres amigas, Irene, Sandra y Erika, tienen un hermano cada una. Cada chica sale con el hermano de una de sus amigas. Un día, Irene se encuentra con el hermano de Sandra y su pareja. ¿Puedes decir quién es la pareja de Sandra?	**24** *Con números se puede demostrar cualquier cosa.* **Carlyle**	**25** ¿Cuántos cubos forman el cuerpo? 	**26** Para el laboratorio del Instituto se compra un microscopio por 725 bolívares y un frigorífico por 510,84 bolívares. ¿Cuál era el precio real de cada uno de ellos si le hicieron un descuento del 20 % en el microscopio y un 12 % en el frigorífico al Instituto?
29 ¿Cuánto hay que aumentar el numerador de la fracción $\frac{1}{8}$ para obtener $\frac{3}{2}$?	**30** ¿Cuántos divisores tiene $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$? (1 y el mismo número son divisores)			

El problema del mago

En la Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO 2000[1], se planteó un problema muy interesante. Digo esto pues el problema es uno de esos que cualquier persona puede comprender y más aún, disfrutar de su encanto, además nos permite a los profesores de matemáticas, asombrar a nuestros alumnos, amigos, familiares y cualquiera a quien le mostremos el truco de magia que dicho problema plantea. Sin más preámbulos veamos el Problema del Mago.

Problema (IMO 2000)

Un mago tiene cien cartas numeradas del 1 al 100. Las dispone en tres cajas de tal manera que en cada una de ellas haya al menos una carta. Seguidamente pide a alguien de la audiencia que tome dos cartas que estén en cajas diferentes pero, sin que el mago vea de cuáles cajas las tomó. De inmediato esta persona debe anunciar en voz alta la suma de los números escritos en las cartas seleccionadas. Con esta información, el mago dice de cuales cajas se tomaron las cartas. ¿Cuántas maneras hay de disponer las cartas para que el truco funcione?

Solución

Hay doce maneras de disponer las cartas. Veamos:
Primera solución: Se distribuyen las cartas módulo 3. Es decir, en la primera caja se ponen los números que dejan resto cero al dividir entre 3. En la segunda los que dejan resto 1 y en la tercera los de resto 2. De esta forma se garantiza siempre el éxito.
Segunda solución: Se distribuyen poniendo la carta con el 1 en la primera caja, la carta con el 100 en la segunda caja y el resto en la tercera caja.
Cada una de estas dos maneras de hacerlo da seis disposiciones distintas, teniendo 12 en total. Queda ahora demostrar que estas son las únicas formas de hacer la distribución.

Demostración

Como tenemos tres cajas, una roja, una blanca y la tercera azul, diremos que una carta con el número i es roja, si está en la caja roja, azul si está en la caja azul o blanca si está en la caja blanca. En cada caso simplemente diremos que i es rojo, o azul o blanco, según la caja donde esté la carta.
Esta demostración analiza dos casos posibles:

- Caso 1. Supongamos que existe un i tal que, $i, i+1, i+2$, tienen colores diferentes. Digamos rba, (rojo, blanco, azul).

  Como $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, y como el truco funciona bien, entonces el color de $i+3$ no puede ser b ni a, es decir, no puede ser ni el color de $i+1$ ni el color de $i+2$. En consecuencia $i+3$ es r.

  De esta forma hemos visto que tres colores vecinos distintos, determinan al siguiente, es decir, si $i, i+1, i+2$, tienen colores distintos, entonces $i+3$ tiene el mismo color de i. Además el patrón se repite: $rbarbarba \dots etc.$

  Por lo tanto será suficiente con asignar los colores a $1, 2, 3$, lo cual puede hacerse de seis maneras distintas (las seis permutaciones). Todos estos arreglos funcionan bien, pues las sumas $r+b$, $b+a$, y $a+r$, dan restos diferentes módulo 3.

- Caso 2. Supongamos ahora que no hay tres números consecutivos con colores diferentes.

  Supongamos que 1 es rojo, con ello no perdemos generalidad. Sea i el menor número que no es rojo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que su color es blanco. Sea k el menor número azul. Claramente $i<k$, pero además, $i+1<k$, ya que si $i+1=k$, como $i-1$ es rojo, entonces tendríamos que $i-1, i, i+1$ serían rba, lo cual es una contradicción pues no hay rba.

  Supongamos que $k<100$. Como $i+k=(i-1)+(k+1)$, entonces $k+1$ tendría que ser rojo, pues en caso contrario el truco no funcionaría: $blanco + azul = rojo + otro$.

  Pero como $(i+1)+k=i+(k+1)$, entonces $i+1$ tendría que ser azul, lo cual es una contradicción, pues k es el menor azul.

  Por lo tanto $k=100$.

  Como $(i-1)+100=i+99$, entonces 99 es blanco.

  Demostraremos ahora que 1 es rojo, 100 azul y los restantes son blancos.

  Si algún t, con $1<t<100$, fuese rojo, como $t+99=(t-1)+100$, entonces $t-1$ sería azul, lo cual es una contradicción, pues $k=100$ es el menor azul. En consecuencia, si $1<t<100$, entonces t es blanco.

  Esto nos da la coloración, $rbb\dots ba$. Finalmente este arreglo se puede de 6 formas diferentes: $rbb\dots ba$, $abb\dots br$, $rab\dots bb$, $arb\dots bb$, $bb\dots ar$ y $bb\dots bra$.

  Tenemos así las 12 formas posibles en las cuales se pueden disponer las cartas para que el truco funcione.

También se puede dar una demostración muy elegante por inducción. Los interesados pueden consultar [2].

Rafael Sánchez Lamoneda

Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias.
Universidad Central de Venezuela.

[1] The 41st International Mathematical Olympiad. Short-listed problems and solutions. IMO 2000. Korea

[2] http://web.archive.org/web/20040509013140/www.kalva.demon.co.uk/imo/isoln/isoln004.html

OJM

JULIO 2009

Miércoles 1 ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación

$$|||a|+3|-2|=1?$$

Jueves 2 Ordena en orden creciente la siguiente lista: 3, $\sqrt{10}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Viernes 3 Dado un cuadrado $ABCD$, considere el cuadrado $EFGH$ cuyos vértices son los puntos medios de $ABCD$. ¿Cuál es la razón entre el área de $ABCD$ y el área del cuadrado $A'B'C'D'$ cuyos vértices son los puntos medios de $EFGH$?

Lunes 6 Tres hormigas caminan a lo largo de una recta numérica. Cuando se cansan, la hormiga María se sienta en el número 24, la hormiga Ana se sienta en el número 66 y la hormiga Carmen se sienta entre María y Ana, a dos tercios de la distancia de María a Ana, quedando más cerca de Ana. ¿En cuál número está Carmen sentada?

Martes 7 Si x es solución de la ecuación

$$\frac{x+1}{1}+\frac{x+2}{2}+\frac{x+3}{3}+\dots+\frac{x+100}{100}=100$$

entonces ¿cuál es el valor que puede tomar x?

Miércoles 8 En una carrera, exactamente el 20 % de los corredores que llegaron a la meta tardaron menos de 45 minutos; y exactamente el 25 % tardaron más de una hora. 49 corredores se declararon satisfechos con el tiempo que habían hecho y el total de los corredores que inició la carrera era 73. ¿Cuántos se retiraron sin concluir la carrera?

Jueves 9 Hemos encontrado a dos ovejas atadas, cada una con una cuerda de 9 metros, a una esquina diferente de un corral rodeado de pastos. El corral tiene forma de triángulo equilátero de 9 metros de lado. ¿Cuál es la superficie máxima que tienen para pastar entre las dos ovejas?

Viernes 10 Una mesa de billar tiene forma de rectángulo $ABCD$. El ancho AB mide 160cm. Una bola, colocada a 60cm de los lados AB y BC, se lanza en dirección opuesta al vértice más cercano B. Después de tocar cinco bandas, la bola vuelve a su punto de partida. ¿Cuánto mide, como mínimo, el largo BC de la mesa?

Lunes 13 Un hombre compró doce piezas de fruta (manzanas y naranjas) por 99 céntimos. Si una manzana cuesta 3 céntimos más que una naranja, y compró más manzanas que naranjas, ¿cuántas de cada compró?

Martes 14 Un hombre cobra un cheque por d bolívares y c céntimos en un banco. El cajero, por error, le da c bolívares y d céntimos. El hombre no se da cuenta hasta que gasta 23 céntimos y además observa que en ese momento tiene $2d$ bolívares y $2c$ céntimos. ¿Cuál era el valor del cheque?

Miércoles 15 En un círculo de radio R se inscribe un cuadrado; en el cuadrado, un círculo y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de los círculos.

Jueves 16 Encontrar un número de 4 cifras de la forma $aabb$ que sea cuadrado perfecto.

Viernes 17 Se lanza un dado dos veces. Hallar la probabilidad de que primero salga un 4 y luego no.

Lunes 20 ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo de lados 8, 15 y 17 cm?

Martes 21 Encontrar la suma de los coeficientes del polinomio que resulta de operar y reducir términos en la expresión:

$$(1-3x+3x^2)^{743}\cdot(1+3x-3x^2)^{744}$$

.

Miércoles 22 ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de 3 personas de un grupo de 20?

Jueves 23 Hallar tres números naturales en progresión aritmética de diferencia 2, tales que la suma de sus cuadrados sea un número de 4 cifras iguales.

Viernes 24 *En las matemáticas es donde el espíritu encuentra los elementos que más ansía: la continuidad y la perseverancia.*

Anatole

Lunes 27 El número real a es tal que hace que la ecuación

$$x^2+2ax+1=0$$

tenga una única solución. ¿Cuántos posibles valores puede tomar a?

Martes 28 En un restaurante chino se da una fiesta. Cada dos invitados comparten un plato de arroz tres delicias, cada tres uno de salsa y cada cuatro uno de carne agridulce. Si en total se sirven 65 platos, ¿cuántos invitados acudieron a la fiesta?

Miércoles 29 La suma de los números a y b es cero. Si existe un número c tal que $a=\frac{c}{2}$ y $b=-\frac{c}{3}$, ¿Cuál es el valor de a?

Jueves 30 17 osos comen tanto como 170 monos; 100.000 musarañas tanto como 50 monos; 4 elefantes comen lo mismo que 10 osos. ¿Cuántas musarañas son necesarias para acabar con la comida de 12 elefantes?

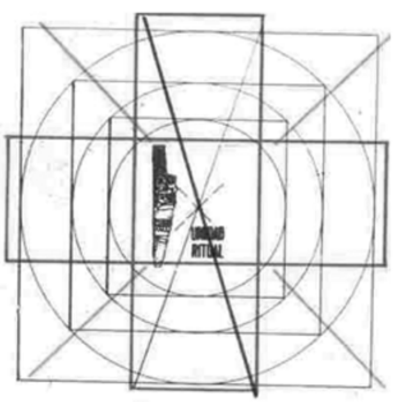
Viernes 31 El café pierde 1/5 de su peso al tostarlo. Comprando café verde a 12 bolivares /Kg, ¿a cómo deberá venderse el kilogramo de café tostado para ganar 1/10 del precio de compra?

Nuestras primeras matemáticas

Las actividades que conducen al desarrollo de las ideas matemáticas han estado presentes en diferentes culturas a lo largo de la historia de la humanidad, incluyendo a las culturas de los habitantes de América antes de la llegada de los españoles. Dos ejemplos de ello los encontramos en las actividades de medición que originó la escala de cruces utilizada por los pueblos andinos, y en las actividades de conteo que dieron origen al sistema de numeración utilizado por los pueblos mayas.

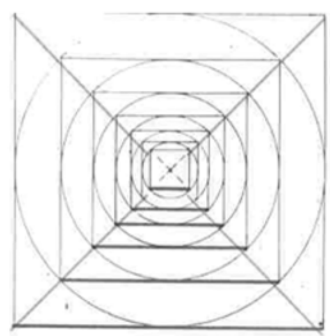
En la geometría andina, la unidad ritual básica, de acuerdo a la necesidad adoptaba diversos *múltiplos* graficados como cruces cuadradas de diferentes magnitudes, de manera similar a como en el llamado mundo occidental se utiliza diversos múltiplos de la unidad básica de acuerdo con las necesidades (milésimas en mecánica, centímetros en diseño, metros en arquitectura, kilómetros para distancias entre ciudades, hectáreas para el área de un terreno).

Las magnitudes de las cruces cuadradas crecen en una progresión geométrica que tiende a a partir de un cuadrado original unitario. De acuerdo con la escala de los objetos que querían dimensionar los hamaut'tas variaban las unidades desde las más pequeñas hasta las medidas itinerantes. La primera cruz es engendrada por el cuadrado original unitario, que puede servir para medir objetos pequeños. La segunda cruz para medidas *manuables* como el bastón de un operador representado en el monolito XXI de Tello y que mide 1117 metros. La tercera cruz, que es la categoría de los monolitos, patrones de medida o unidades principales, como el Lanzón de Chapín. La cuarta cruz se emplea en medidas de superficies menores. La quinta cruz es la escala de los templos y los espacios rituales asociados. La sexta cruz se emplea para organizar los complejos ceremoniales y los grandes espacios abiertos que los contemplan.[1]



Múltiplos

Unidad ritual



Submúltiplos

Para los mayas el número 5 forma una unidad, la mano, y aun hoy en día en las ventas populares se compran verduras o frutas por mano, de ahí la importancia del 5. El 4 es importante porque 4 unidades de 5 forman una persona, son 20 dedos en total los que tiene una persona, por eso la importancia del número 20, base del sistema de numeración maya. El sistema de numeración maya es posicional, complementado con agrupamiento simple de tres símbolos que representan el uno, el cinco y el cero. El uno está representado por un punto, la barra representa el número 5 y una concha al número cero; los siguientes numerales son combinaciones de barras y puntos. Se utilizan una, dos o hasta tres barras, combinadas con uno, dos, tres o hasta cuatro puntos para representar los números del uno al diecinueve.[2]

Decimal	Maya	Decimal	Maya
1	𝋡	11	𝋫
2	𝋢	12	𝋬
3	𝋣	13	𝋭
4	𝋤	14	𝋮
5	𝋥	15	𝋯
6	𝋦	16	𝋰
7	𝋧	17	𝋱
8	𝋨	18	𝋲
9	𝋩	19	𝋳
10	𝋪	0	𝋠

Si bien es cierto que la matemática es una ciencia universal, es importante valorar los conocimientos matemáticos generados por nuestros pueblos y no solamente los llamados occidentales o traídos de Europa, de manera que estemos conscientes que en cualquier parte las personas pueden y necesitan hacer matemática.

Yolanda Serres Voisin

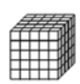
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias.
Universidad Central de Venezuela.

[1] Génesis de la cultura andina, de Carlos Milla Villena, 3ra edición, 1992.

[2] Matemática Maya, de Leonel Morales, 2007.

ORM

AGOSTO 2009

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 Teresa tiene 37 bombones de chocolate. Su amiga Claudia dice *"Si me dieras 10 de tus bombones, ambas tendríamos el mismo número de bombones"*. ¿Cuántos bombones tiene Claudia?	**4** Observa la secuencia: $AC, BD, CE, DF, \ldots$ ¿Qué sigue?	**5** 7 amigos se saludan. Si cada uno de ellos le da la mano a cada uno de los otros, ¿cuántos apretones de mano se dan?	**6** Soy un número par entre 20 y 40. La suma de mis dígitos es 7. ¿Quién soy?	**7** ¿En cuáles horas en punto las agujas de un reloj forman un ángulo recto? 
10 ¿Cuántos número de tres dígitos hay, menores que 200, que tengan todos sus dígitos impares?	**11** Juan dice que él es ahora tres veces más viejo que su hermana. El año pasado él era cuatro veces más viejo. ¿Qué edad tiene Juan ahora?	**12** Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 forma dos números de dos dígitos cada uno, y multiplícalos. ¿Cuál es el mayor producto que puedes obtener?	**13** Observa la secuencia: $1, 3, 7, 13, 21, \ldots$ ¿Cuál número sigue?	**14** $(1, 2, 3)$ es una terna de tres dígitos cuya suma es 6. Si consideramos a $(1, 2, 3)$ $(2, 1, 3)$ y $(3, 1, 2)$ iguales porque tienen los mismos dígitos, ¿cuántas ternas diferentes de dígitos hay, admitiendo repeticiones, cuya suma sea 6?
17 Han transcurrido cinco octavos de un día, ¿qué hora es?	**18** El cubo $5 \times 5 \times 5$ se pinta de negro. Se descompone en cubos de $1 \times 1 \times 1$. ¿Cuántos cubos $1 \times 1 \times 1$ tienen sólo dos caras negras? 	**19** Escribe una expresión numérica con tres cuatros cuyo resultado sea 20.	**20** Tres tazas de agua llenan dos tercios de una jarra. ¿Cuántas tazas llenan la jarra?	**21** Gabriel es más alto que Armando y más pequeño que Tomás. Ignacio es más alto que Cristian pero más pequeño que Gabriel. ¿Quién es el más alto?
24 La suma de los pesos de María y Ana es 32 kg. María pesa 8 kg. más que Ana. ¿Cuánto pesa María?	**25** Dibuja un rectángulo. Traza cuatro rectas sobre el rectángulo. ¿Cuál es el mayor número de regiones en que se puede dividir el rectángulo?	**26** Un vaso lleno con agua pesa 200 g. Al tomarse la mitad del agua, el vaso con el resto de agua pesa 150 g. ¿Cuánto pesa el vaso vacío?	**27** Con los dígitos 3, 0 y 4 forma el mayor y el menor número de tres cifras diferentes. ¿Cuál es su diferencia?	**28** Un cartón de huevos contiene 30 huevos. ¿Cuántas docenas de huevos hay en 10 cartones de huevos?
31 Simón tiene al menos tres palillos idénticos, pero le resulta imposible construir un triángulo sin romperlos. ¿Cuántos palillos tiene Simón?				

Los números poligonales y fórmulas de recurrencia

Los números poligonales forman una clase especial de enteros positivos, la cual fue decubierta por los pitagóricos (siglo VI a. C.) y debe su nombre al hecho de que en aquella época los números se solían representar geométricamente mediante la disposición de piedras pequeñas, redondeadas y lisas (guijarros) en configuraciones de algún poligono regular.

Por ejemplo, el 3 el 6 son números triangulares, mientras que el 4 y el 9 son números cuadrados, como muestra la siguiente figura

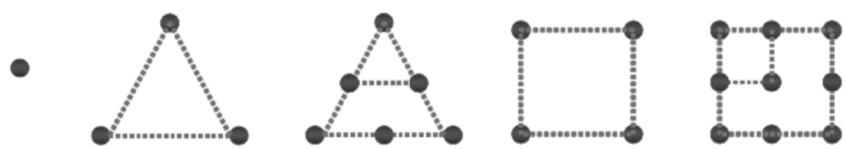


Figura 1: Números triangulares y cuadrados.

Si notamos que estas configuraciones geométricas empiezan con un guijarro, entonces tendrá sentido considerar al número 1 como triangular, cuadrado, pentagonal, hexagonal, etc. Sin embargo, no todo entero positivo ha de ser un número poligonal, por ejemplo, el 2, no es un número poligonal. Existen fórmulas de recursión que permiten determinar expresiones generales para el n-ésimo número poligonal. Por ejemplo, en el caso de los números triangulares tenemos que si denotamos por $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10, \ldots$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} T_2 & = & 1+2 = T_1 + 2, \\ T_3 & = & 3+3 = T_2 + 3, \\ T_4 & = & 6+4 = T_3 + 4, \\ \vdots & \vdots & \quad \vdots \\ T_n & = & T_{n-1} + n \end{array}$$

Esta idea nos sugiere que

Resultado 1 *Para cada número natural $n \geq 2$, se tiene que el n-ésimo número triangular T_n satisface la relación:*

$$T_n - T_{n-1} = n. \tag{1}$$

Expresiones como la dada por la ecuación (1), son conocidas como *Fórmulas de Recurrencia.* Si añadimos el término $T_0 = 0$. Entonces también tendremos que $T_1 = T_0 + 1$. Y de esta forma podemos reescribir nuestro resultado como

Resultado 2 *La familia de todos los números triangulares, T_n satisface la siguiente relación de recurrencia:*

$$T_n - T_{n-1} = n, \ \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

donde para $n = 1$, el dato inicial es $T_0 = 0$.

Aplicando la fórmula de recurrencia anterior, tenemos

$$\begin{array}{rcl} T_1 - T_0 & = & 1, \\ T_2 - T_1 & = & 2, \\ T_3 - T_2 & = & 3, \\ T_4 - T_3 & = & 4, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_n - T_{n-1} & = & n, \end{array}$$

sumando término a término las expresiones anteriores, obtenemos

$$T_n = (T_1 - T_0) + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \cdots + (T_n - T_{n-1}) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por lo tanto:

Resultado 3 *El n-ésimo número triangular T_n puede ser escrito como*

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3}$$

Dejaremos al lector algunas preguntas:

1. ¿Cuál será el trigésimo número triangular?
2. ¿Cuál será la expresión para el n-ésimo número cuadrado?
3. ¿Cuál será la fórmula de recurrencia satisfecha por los números pentagonales?

Mike Malatesta

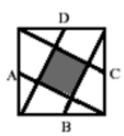
Escuela de Administración y Contaduría
Universidad Central de Venezuela.

Yamilet Quintana

Departamento de Matemáticas
Universidad Simón Bolívar.

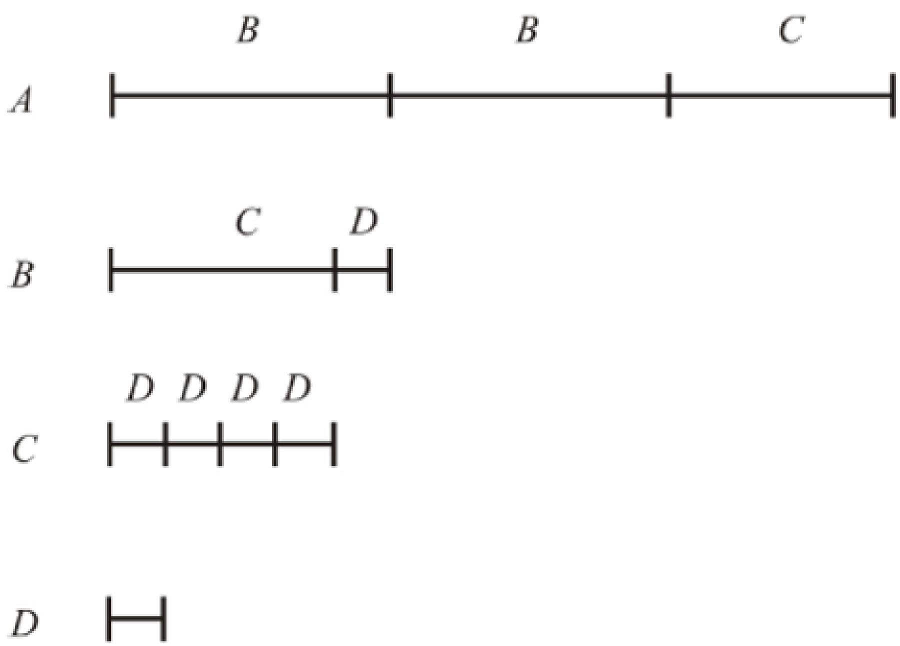
OJM

SEPTIEMBRE 2009

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 En un círculo de radio R se inscribe un cuadrado; en el cuadrado, un círculo y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de los cuadrados.	**2** ¿Cuántas iniciales diferentes podemos hacer con dos o tres letras del alfabeto si éste tiene 27 letras?	**2** Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las cartas llegue a su destino correcto.	**3** Pepe, Pedro y Paco van de excursión. A la hora de comer deciden juntar los refrescos, que se reparten a partes iguales. Pepe aporta 4 refrescos y Pedro 3. Paco no tiene refrescos así que pone 14 bolívares. ¿Cómo deben repartirse Pepe y Pedro los 14 bolívares?
7 Tenemos un cuadrado de lado 10 cm. Calcula el área de la figura sombreada, donde A, B, C y D son los puntos medios de los lados del cuadrado. 	**8** De todos los números $abcd$ de cuatro cifras tales que $a < b < c < d$ se escoge el mayor número divisible por 6. El dígito de las centenas de este número es:	**9** Una tabla tiene 21 columnas numeradas $1, 2, 3 \ldots, 21$ y 33 filas numeradas $1, 2, 3 \ldots, 33$. Borramos las filas cuyo número no sea múltiplo de 3 y las columnas cuyo número sea par. ¿Cuántas celdas quedan entonces después de borrar?	**9** Pedro monta una cerca hexagonal de 6 m de lado para que paste una oveja. Ata la oveja cada día a un vértice distinto de la cerca con una cuerda de 3 m de longitud y el séptimo día la ata al centro con la misma cuerda. Ésta come cada día todo el pasto que está a su alcance. ¿Cuál es la superficie del cercado que queda sin pastar?	**11** Luis quiere vender su caballo y Juan le pide precio. Luis dice: *El caballo tiene cuatro herraduras y cada herradura seis clavos. Paga una moneda por el primer clavo, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto y así hasta los 24 clavos de las herraduras del caballo.* ¿Cuántas monedas vale el caballo?
14 Tengo un montón de manzanas y unas cuantas cajas. Si pongo 7 manzanas en cada caja sobran 10 manzanas, pero si pongo 9 manzanas en cada caja me sobran 2 cajas. ¿Cuántas cajas tengo?	**15** ¿Cuántos números, comprendidos entre 1000 y 9999, verifican que la suma de sus cuatro dígitos es igual que el producto de los mismos?	**16** Se consideran las funciones reales de variable real $f(x)$ de la forma $f(x) = ax + b$, siendo a y b números reales. ¿Para qué valores de a y b se verifica $f^{2000}(x) = x$ para todo número real x?	**17** Hallar todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.	**18** En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?
21 ¿Cuántas ternas ordenadas de números enteros y positivos (a, b, c) distintos de la unidad hay tales que $a \cdot b \cdot c = 7^{39}$?	**22** ¿Cuál es el número máximo de vértices de un polígono regular de 21 lados que podemos elegir para que, al trazar los segmentos que los unen entre sí, no haya dos con la misma longitud?	**23** Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que $n! + 1 = (m! - 1)^2$.	**24** Un triángulo tiene tres números consecutivos como las medidas de sus lados y el ángulo mayor es el doble que el menor. Halle las medidas.	**25** Una floristería tiene 24 rosas blancas, 42 rojas y 36 amarillas después de la venta del día. ¿Cuánto es el mayor número de arreglos florales idénticos que se pueden hacer si se quieren usar todas las flores que quedaron?
28 Encontrar todas las funciones reales tales que $x^2 \cdot f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$.	**29** Determinar todos los enteros n tales que $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ es entero.	**30** Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encontrar la relación existente entre R y r.		

Antifairesis

A los griegos les gustaba restar. Por ejemplo, si tenían dos segmentos restaban el menor del mayor tantas veces como pudieran; si quedaba algo entonces este sobrante se restaba del segmento menor tantas veces como cupiera; si, nuevamente, quedaba algo, este nuevo sobrante se restaba y así sucesivamente. Por ejemplo, en la figura siguiente

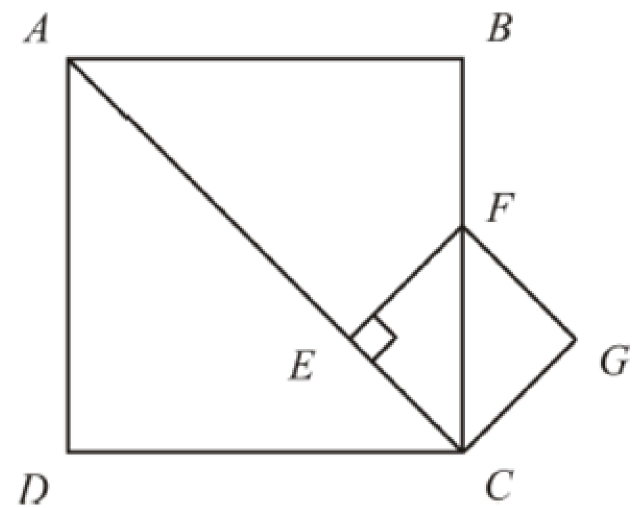


vemos dos segmentos A y B tales que B cabe dos veces en A con un sobrante C; este sobrante se resta de B donde cabe una vez quedando, sin embargo, un exceso D que, a su vez, puede restarse de C donde cabe exactamente 4 veces. Devolviéndose desde D y contando un poquito es claro que D sirve para medir exactamente los segmentos de la figura pues está 14 veces en A y 5 veces en B. Los griegos expresaron esta idea diciendo: "A es a B como 14 es a 5" y a la frase "14 es a 5" la denominaron *logos*, palabra que nosotros traducimos como *razón*; así, los segmentos A y B están en la razón 14 es a 5. Pero las razones pueden expresarse de otra manera: como una lista de números, tomando en cuenta los números de veces en que un segmento puede incluirse dentro de otro; por ejemplo la razón 14 es a 5 puede expresar mediante la lista

$$2, 1, 4$$

con lo cual se afirma que B cabe 2 veces en A, C 1 vez en B y D 4 veces en C. Este procedimiento de substracciones sucesivas que permiten expresar la razón como una lista de números enteros fue denominado *antifairesis*.

Posiblemente el lector puede estarse preguntando si siempre que comparemos dos segmentos por antifairesis vamos a tener la suerte de conseguir una lista finita de números como la anterior, que represente una razón entre los segmentos dados. Es fácil convencerse de que no es así. Tratemos, con ayuda de la figura siguiente



de conseguir la razón entre la diagonal AC de un cuadrado y su lado AB. El compás dice que el lado está una vez en la diagonal dejando un sobrante: el segmento AE y el sobrante EC. Usando el compás se puede ver que EC está dos veces en BC, dejando un pequeño sobrante. Repitiendo el procedimiento con el cuadrado $ECGF$ vemos que este sobrante está dos veces en el segmento EC dejando de nuevo un sobrante que, al repetir el procedimiento, estará de nuevo dos veces... En otras palabras, la comparación de la diagonal del cuadrado con su lado produce la secuencia de números

$$1, 1, 2, \ldots$$

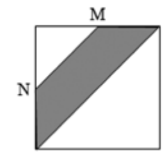
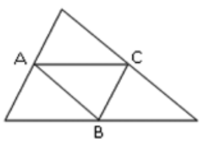
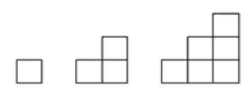
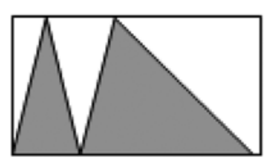
¡que sigue así infinitas veces!

Consideraciones como ésta y otras similares convencieron a los griegos de que el *logos* (la razón) no era siempre posible, dando paso así al *álogos* o la no razón. Estas ideas son el germen de lo que hoy conocemos como números racionales y números irracionales respectivamente que, en su totalidad, constituyen el conjunto de los números reales, concepto de importancia fundamental en la matemática moderna.

Douglas Jiménez

Sección de Matemáticas.
UNEXPO "Antonio José de Sucre", Barquisimeto, Venezuela

OCTUBRE 2009

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			1 M y D son puntos medios. ¿Qué fracción del cuadrado es la parte sombreada? 	**2** Dieciocho estudiantes están cruzando una calle en parejas. Se numeran del 1 al 9 las parejas de estudiantes. Las parejas con número par están formadas por una hembra y un varón. Las parejas con número impar están formadas por dos varones. ¿Cuántos varones cruzan la calle?
5 Los lados del triángulo pequeño ABC son paralelos a los lados del triángulo mayor. ¿Cuántos trapecios hay en la figura? 	**6** Pedro tiene una pelota de goma muy especial: al dejarla caer desde una cierta altura rebota un medio de esa altura. Si se deja caer desde una altura de 32 cm, ¿qué distancia ha recorrido la pelota al tocar el suelo por cuarta vez, desde el momento que se dejó caer?	**7** Mi papá compró de los tres tipos de chocolates que había en la tienda: grande, mediano y pequeño. Un chocolate grande cuesta 4 bolívares, uno mediano 2 bolívares y uno pequeño 1 bolívar. Él compró 10 chocolates y pagó 16 bolívares. ¿Cuántos chocolates grandes compró?	**8** Con ocho cubos se construye un cubo que tiene dos cubos en cada arista. ¿Cuántos cubos necesitas para construir un cubo con tres cubos en cada aristas?	**9** ¿Cuántos números de tres dígitos hay tales que el dígito de las unidades sea el doble del dígito de las centenas?
12 *La música es el placer que el alma experimenta contando sin darse cuenta de que cuenta.* **Leibnitz**	**13** Determina la diferencia entre el número mayor y el número menor, de tres dígitos cada uno, que puedes formar con los dígitos 2, 0 y 8, sin repetición.	**14** Carmen compró galletas a Bs. 0,35 cada galleta. Pagó con un billete de Bs. 2 y le dieron de vuelto Bs. 0,25. ¿Cuántas galletas compró Carmen?	**15** Observa la secuencia de figuras:  ¿Cuántos cuadrados hay en la figura que sigue?	**16** En una sección de cuarto grado, todos los alumnos tienen en total 39 lápices. Ocho de los alumnos tienen un lápiz cada uno y cinco tienen tres lápices cada uno. El resto tienen dos lápices cada uno. ¿Cuántos alumnos hay?
19 ¿Cuántos números de dos dígitos hay en los que el número de la derecha es mayor que el de la izquierda?	**20** En un baúl hay 5 cofres, en cada cofre hay 3 cajas y en cada caja hay 10 monedas de oro. El baúl, los cofres y las cajas tienen cerradura con llave. ¿Cuál es el menor número de cerraduras que deben ser abiertas con el fin de obtener 90 monedas de oro?	**21** ¿Qué fracción del rectángulo es la parte sombreada? 	**22** $(100 \times 2009 + 2009) \div 2009 =$	**23** A cada número de dos dígitos se le determina el producto de sus dígitos y luego la suma de los dígitos del producto. ¿Cuál es la mayor suma que se puede obtener?
26 Se reparten equitativamente dos pizzas entre cinco niños. ¿Qué fracción de pizza le corresponde a cada niño?	**27** Petra toma una hoja de papel y la corta en diez piezas. Toma una de las piezas de papel y la corta en diez piezas y repite dos veces más el proceso. ¿Cuántas piezas de papel tiene Petra?	**28** 6 vacas comen 6 sacos de grama en 6 minutos. ¿Cuántas vacas comerán 100 sacos de grama en 100 minutos?	**29** Claudia dibujó la inicial de su nombre, una C, en su libro de ejercicios. La C fue dibujada al dividir, exactamente en dos, anillos con un radio interno de 1 cm y radio externo de 4 cm. ¿Cuál es el valor del perímetro de C?	**30** ¿Cuántos divisores positivos tiene $5 \times 4 \times 3 \times 2$? (Divisores incluyen el 1 y los enteros)

Trucos con el dominó

Acostumbro salir los fines de semana a entretenerme jugando una partidita de dominó en el pool del señor José, aquí en el sector del Vigía, en Los Teques. Una tarde se nos presentó el señor Miguel y nos divirtió con un par de trucos que dejó a la concurrencia admirados por las dotes adivinatorias de Miguel.

El primer truco consistió en tomar siete fichas (o piedras como le decimos los jugadores de dominó) y responder sucesivamente a las preguntas de ¿cuántos blancos tienes? ¿cuántos 1? ¿cuántos 2? y así hasta ¿cuántos 6?. A cada respuesta Miguel separaba ordenadamente el número que decíamos de un arreglo de 3×7 que había colocado sobre la mesa con las 21 piedras sobrantes, al final el número de dobles que teníamos era igual a la cantidad de fichas que le quedaban en la segunda fila para retirarla completamente.

El segundo fue más sorprendente, él se alejaba de la mesa y sus alrededores de manera de no ver lo que estábamos haciendo y cuando lo llamábamos era capaz de adivinar el total de tantos de un grupo de piedras obtenidas según sus instrucciones que eran las siguientes: ***"coloque las 28 fichas boca abajo en la mesa y extraiga una primera ficha, mire el número de tantos que tiene y consérvela bocabajo, separe a otro lado de la mesa tantas piedras como haga falta para sumar doce con los tantos de la ficha vista; repita el procedimiento con otra ficha, es decir si usted agarra una ficha con 4 tantos debe separar 8 fichas del centro a un lado de la mesa, de tal manera que la cantidad de fichas en el centro va mermando mientras que a un lado de la mesa va creciendo y usted va acumulando de una en una su propio conjunto; el juego termina cuando las fichas del centro no alcanzan, y en ese caso, debe devolver al centro el número de piedras necesarias para completar el proceso, por ejemplo: si el número de fichas que quedan en el centro es de 3, y usted escoge una de ellas que tiene 7 tantos, debería pasar a un lado 5 piedras, pero sólo hay 2, así que pasa esas dos fichas al lado y devuelve 3 del conjunto de al lado hacia el centro para completar las 5 que tenía que mover. Otro ejemplo: si en el centro quedan 8 piedras y escoge una que tiene 1 tanto, debe mover 11 piedras, entonces pase las 7 que quedan y regrese 4 al centro para completar las 11".*** *Miguel regresaba a la mesa, veía la cantidad de piedras que teníamos en la mano y las que había en el centro (todas bocabajo) e indefectiblemente adivinaba el total de puntos que había en nuestras piedras. El primer truco es relativamente fácil explicarlo si notamos que en un conjunto de 7 piedras el número de blancos, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sumados al número de dobles es con seguridad 14. Hay que tomar en cuenta que cuando preguntamos el número de 2 que tenemos, se cuentan las piedras que tienen al menos un 2, es decir, el doble dos cuenta como una sola piedra. Pero el segundo truco nos hizo pensar más cuando Miguel explicó como calculaba la suma diciendo:* ***"las tres primeras piedras de tu conjunto suman 11 en total y cada piedra adicional suma 13, luego le restamos el número de fichas que hay en el centro y el resultado es el total de tantos que tienes en tus manos".*** *Lo verificamos varias veces y la cosa funcionaba perfectamente, así que le prometí a Miguel y a los presentes que escribiría una explicación de semejante truco y aquí se las presento.*

Al final el conjunto de fichas queda divido en tres subconjuntos: el conjunto de piedras a contar que llamaremos A, el de las piedras apartadas a un lado que llamaremos B y el de las que quedan en el centro que llamaremos C (C puede ser vacío, pero A y B no), los cardinales de A y B varían en cada paso, pero el de C sólo puede ser distinto de cero en el último paso, por eso llamaremos n al cardinal de A, K_n al cardinal de B y R al cardinal de C. Es claro que $n+K_n+R=28$ porque entran en juego todas las fichas del dominó y cualquier ficha tiene que estar en uno de los tres subconjuntos, de aquí que $K_n = 28-n-R$ que llamaremos ecuación (1). Por otro lado también debe ser claro que el proceso se repite por lo menos tres veces, pues después de la segunda ronda todavía deben quedar fichas en el centro, por lo tanto $n \geq 3$. Veamos ahora como son las sumas parciales S_n en cada paso (S_n es la suma de los tantos que tengo en mis manos después del paso n). En el primer paso, por el algoritmo, $S_1+K_1 = 12$ por tanto $S_1 = 12\times 1 - K_1$ y en el segundo paso $S_2+K_2 = 24$ (dos veces doce) y de ahí $S_2 = 12\times 2 - K_2$, pero desde el tercer paso en adelante pudiera estar involucrado en la suma parcial R, supongamos que el proceso se termina en el tercer paso, en este caso $S_3 + K_3$ no es 36 porque de B salieron R fichas que ya habían entrado alguna vez, por lo cual habría que descontar $2R$ del 36 de allí que $S_3 = 12\times 3 - K_3 - 2R$ y en general, sabiendo que R sólo puede ser distinto de 0 cuando culmina el proceso podemos escribir $S_n = 12n - K_n - 2R$ para todo n natural y $n \leq 9$. Si sustituimos en esta última ecuación el valor de K_n dado por la ecuación (1) tendremos

$$S_n = 12n - (28-n-R) - 2R$$
$$S_n = 12n - 28 + n + R - 2R$$
$$S_n = 13n - 28 - R.$$

Aquí, recordando que $n \geq 3$, escribimos -28 como -39 + 11 y nos queda:
$S_n = 13n - 39 + 11 - R$ o bien $S_n = 11 + 13(n-3) - R$

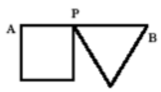
Esta es la formula que Miguel utilizaba para "adivinar" los tantos que teníamos en la mano. Miguel decía: ***"las tres primeras piedras de tu conjunto suman 11 en total..."*** ya tenemos el término independiente; ***"...y cada piedra adicional suma 13,..."*** lo explica el término $13(n-3)$ ya que obligatoriamente $n \geq 3$ ***"...luego le restamos el número de fichas que hay en el centro..."***, es decir R ***"...y el resultado es el total de tantos que tienes en tus manos"*** esto es S_n. Salud Miguel por habernos entretenido con estos trucos y salud también a todos los amantes de la matemática y jugadores de dominó que lean estas líneas.

Lisandro Alvarado

Colegio Los Hipocampitos
Los Teques

OJM

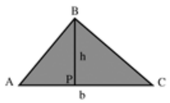
NOVIEMBRE 2009

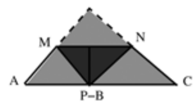
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 El segmento AB mide 21 cm de longitud. El punto P se coloca de forma que el cuadrado y el triángulo equilátero tengan el mismo perímetro. Halle el perímetro de ambas figuras. 	**3** En un grupo de compañeros de clase, las chicas forman más de un 45 % del grupo pero menos del 50 %. ¿Cuál es el mínimo número posible de niñas en el grupo?	**4** Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 99 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo. Está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad?	**5** Este es un castillo de cartas de tres pisos. Se aprecia que se necesitan 15 cartas. ¿Cuántas cartas necesitaríamos para tener un castillo similar, pero de 10 pisos de altura? 	**6** A partir de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se forman todos los números posibles de 9 cifras, todas ellas distintas. Y se ordenan de forma creciente: 123456789; 123456798; 123456879; ... ; 987654321 ¿Qué número ocupará la posición 100.000?
9 Mauricio, el bisabuelo de José, no es ciertamente centenario, pero es de edad muy avanzada. Lo que os puedo decir es que el año anterior su edad era múltiplo de 8, y que el año próximo es múltiplo de 7. ¿Cuál es la edad de Mauricio?	**10** Si p es un número real y las raíces de $x^3+2px^2-px+10=0$ están en progresión aritmética, halla dichas raíces.	**11** En el triángulo acutángulo ABC, AH, AD y AM son, respectivamente, la altura, la bisectriz y la mediana que parten desde A, estando H, D y M en el lado BC. Si las longitudes de AB, AC y MD son, respectivamente, 11, 8 y 1, calcula la longitud del segmento DH.	**12** Un grupo de chicos y chicas comen en un café en el que sólo se sirven pizzas cortadas en 12 raciones. Cada chico comió 6 ó 7 raciones y cada chica 2 ó 3 raciones. Se sabe que 4 pizzas no fueron suficientes y que con 5 pizzas hubo de sobra. Calcular el número de chicos y chicas.	**13** Dos triángulos equiláteros iguales se pegan por un lado. Después todas las esquinas de la figura obtenida se juntan en el centro. ¿Qué figura se obtiene?
16 El entrenador más experimentado del circo necesita 40 minutos para lavar un elefante. Su hijo lleva a cabo la misma tarea en 2 horas. ¿Cuántos minutos tardarán el entrenador y su hijo en lavar 3 elefantes trabajando juntos?	**17** Si 800 pesos tienen el mismo valor que 100 lipras y 100 pesos tienen el mismo valor que 250 bólares, ¿cuántas lipras valen lo mismo que 100 bólares?	**18** Una acción en la bolsa de valores vale 1400 sirios en mayo. De mayo a junio la acción aumenta un 10 %. De junio a julio la acción disminuye un 10 %. ¿Cuántos sirios vale a fin de julio?	**19** Si efectuamos el producto de todos los números impares comprendidos entre 1 y 1994, ¿cuál es la cifra de las unidades del número así obtenido?	**20** Si escribí todos los números enteros del 1 al 1000, ¿cuántas veces apareció la cifra 5?
23 Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa 6 y perímetro 14, ¿cuál es su área?	**24** Dos enteros $a>1$ y $b>1$ satisfacen $a^b+b^a=57$. Encuentra la suma $a+b$.	**25** El promedio de 5 números es 40. Al eliminar dos de ellos el nuevo promedio es 36. ¿Cuál es el promedio de los dos números eliminados?	**26** ¿Cuántos números múltiplos de 6 menores que 1000 tienen la propiedad de que la suma de sus cifras es 21?	**27** ¿Cuántos números entre 5678 y 9876 tienen la propiedad de que el producto de sus cifras es igual a 343?
30 Un niño corta un cuadrado de tres días por tres días de la página de un calendario. Si la suma de las nueve fechas es divisible entre 10 y sabemos que la fecha de la esquina superior izquierda es múltiplo de 4. ¿Cuál es la fecha de la esquina inferior derecha?				

Geometría doblando papel

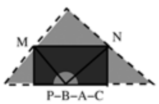
Con actividades sencillas, mediante el doblaje de papel, podemos ilustrar diferentes propiedades geométricas, desde unas muy simples hasta otras más complejas. Comenzamos con una de las propiedades fundamentales de los triángulos.
Considerar un triángulo de papel. Doblando el papel, trazar una altura.

Doblando el papel, llevar B sobre P.





Llevar también A y C sobre P.

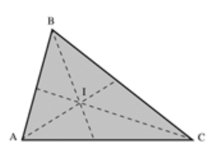


De esta manera se obtiene un rectángulo. Los tres ángulos dibujados forman un ángulo que mide 180°. Pero esos ángulos son los ángulos interiores del triángulo inicial. Por lo tanto *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es* 180°.
Usando esta misma figura podemos calcular el área del triángulo conociendo la del rectángulo. En efecto, notemos que el área del triángulo es el doble del área del rectángulo. Además, el segmento MN mide la mitad de la base AC. Por otro lado, la altura del rectángulo final es la mitad de la altura del triángulo ABC.
Por lo tanto el área del triángulo es $2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}$ es decir:

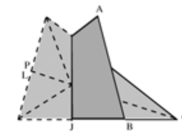
$$\text{área del triángulo} = \frac{Base \times Altura}{2}$$

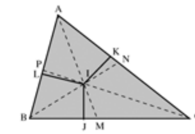
Podemos ilustrar propiedades más complejas de los triángulos, por ejemplo podemos ilustrar la existencia del incírculo de un triángulo dado, es decir el círculo que está dentro del triángulo y es tangente a los tres lados del triángulo. También podemos encontrar el centro de dicho círculo, llamado incentro. Considerar un triángulo de papel cualquiera.

Uniendo de dos en dos los lados que forman los tres ángulos en el triángulo se pueden trazar con dobleces las tres bisectrices. Observar que las tres líneas se cortan en un punto llamado el *incéntro* del triángulo. Marcar por las dos caras del papel ese punto y nómbralo con la letra I.

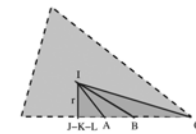


Ahora vamos a trazar segmentos perpendiculares desde I a los lados del triángulo. Hacemos resbalar un lado sobre él mismo doblando el papel, aplastando sin marcar hasta que vemos aparecer en el doblez el punto I. Sin perder la guía del lado marcamos el doblez desde I hasta el lado. Repetimos la operación en los otros lados del triángulo.

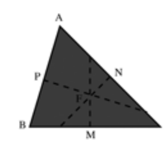




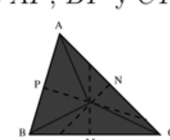
Doblando los segmentos IA, IB e IC en forma de colina (hacia fuera) y los segmentos IJ, IK e IL en forma de valle (hacia dentro), se pueden juntar estos tres últimos segmentos, lo que prueba que son iguales.



Sabiendo ya que los segmentos IJ, IK e IL son iguales entonces podemos ver la existencia de un círculo con centro en I y radio $r = IJ = IK = IL$ que resulta tangente a los tres lados del triángulo. Este círculo se llama el *incírculo* del triángulo.
De manera similar podemos encontrar el circuncentro de un triángulo, es decir el centro del círculo que para por los tres vértices del triángulo. A este círculo se le conoce como el circuncírculo. También ilustramos la existencia de dicho círculo.
Considerar un triángulo de papel acutángulo y escaleno. Trazar sus mediatrices doblando el papel, para hacer esto se hacen coincidir de dos en dos sus vértices. Las tres mediatrices se cortan en un punto que notaremos con la letra F y que se llama el *circuncentro* del triángulo.



Con un lápiz trazar los segmentos AF, BF y CF.



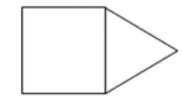
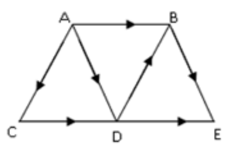
Doblando en forma de valle por FM, FN y FP y en forma de colina por AF, BF y CF se obtiene una estrella de tres puntas que es posible cerrar juntando los tres brazos, comprobando de esta manera que los segmentos AF, BF y CF son iguales. De esta forma podemos ilustrar la existencia de un círculo con centro en F y que pasa por los tres vértices del triángulo. Este círculo se llama el *circuncírculo* del triángulo.

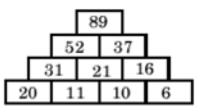
Luís Fernando Cáceres Duque

Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico-RUM - Puerto Rico

ORM

DICIEMBRE 2009

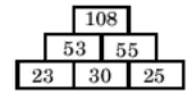
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 ¿Cuántos números tiene la secuencia $0, 7, 14, 21, 28, ..., 161$?	**2** ¿Cuántas veces puedes restar 320 de 6000?	**3** Luis obtuvo 90 o 100 puntos en cada una de las cinco pruebas de Matemática. Su promedio de matemática es 98. ¿Cuántos 90 obtuvo?	**4** La figura está formada de un triángulo equilátero de lado 3 cm. y un cuadrado. ¿Cuál es su perímetro? 
7 Si sólo se puede caminar en el sentido de las flechas, ¿cuántas rutas puedes tomar para ir de A hasta E? 	**8** Un coleccionista gasta 100 bolivares en comprar sellos de 1, 4 y 12 bolivares. ¿Cuántos sellos serán del tipo de 1 bolivar si en total ha comprado 40 sellos?	**9** Un antiguo acertijo popular dice: * *Cada mochuelo en su olivo y sobra un mochuelo* * *Dos mochuelos en cada olivo y sobra un olivo.* ¿Sabrías cuántos mochuelos y cuántos olivos son?	**10** Cada letra corresponde a un número distinto entre 0 y 9: $ZOO^2 = TOPAZ$ ¿Sabrías calcular el valor de la letra P?	**11** Para numerar las páginas de un libro grande, hacen falta 3.005 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
14 En el problema de sustracción coloca los dígitos 3, 5, 6, 7 y 9. ¿Cuál es la menor diferencia que puedes obtener? 	**15** Con $\frac{5}{8}$ de litros de agua se llena un tanque hasta sus $\frac{7}{8}$ de capacidad. ¿Cuál es la capacidad del envase?	**16** En una reunión hay 9 personas. La primera da la mano a una persona; la segunda da la mano a 2 personas; la tercera da la mano a 3 personas,..., la octava da la mano a 8 personas. ¿Cuántas veces da la mano la novena persona?	**17** *Sin matemáticas no se penetra hasta el fondo de la filosofía; sin filosofía no se llega al fondo de las matemáticas; sin las dos no se ve el fondo de nada.* **Bordas-Desmoulin**	**18** Al numerar las páginas de un libro usamos las cifras del 0 al 9. ¿Cuántas cifras se utilizan en total para paginar un libro de 358 páginas?
21 ¿De cuántas formas diferentes es posible ordenar las letras L, A, P, I, Z de modo que la primera y última letra sean vocales?	**22** Con los dígitos 1, 2 y 5, ¿cuántos números mayores que 25 decenas puedes escribir, sin repetir dígitos?	**23** ¿Cuántos triángulos hay de hasta 10 cm de perímetro con las medidas de sus lados todas enteras?	**24** Cuando nos cruzamos casualmente en la calle con dos de las hermanas García, en uno de cada dos casos ambas tienen los ojos azules. Sabiendo que las hermanas García son menos de 20, ¿cuántas de ellas tienen los ojos azules?	**25** *La mejor forma de librarse de un problema es resolverlo.* **Bacon**
28 El primer dígito de un número de seis cifras es el 1. Si se mueve el 1 al otro extremo, el nuevo número es tres veces mayor que el primero. ¿Cuál es el número original?	**29** ¿Cuál es el resultado de realizar correctamente la operación $8 + 4 \div 2 - 12 \div 3 + 1$?	**30** He vendido manzanas en cuatro casas. En cada una vendí la mitad de las que llevaba más media, y conste que jamás partí manzanas. Ya no me queda ninguna. ¿Cuántas manzanas había en la cesta?	**31** Los 7 enanitos de Blanca Nieves nacieron el mismo día pero en 7 años consecutivos. La suma de las edades de los 3 más jóvenes es 42 años. ¿Cuál es la suma de las edades de los 3 más viejos?	

	ENERO
2	$\frac{11}{36}$.
5	9 cm.
6	6840.
7	75.
8	$108 + 36\sqrt{3}$ cm^2.
9	50 personas.
12	64π m^2.
13	$40 - 8\pi$ cm^2.
14	287 x 23 = 6601.
16	5 km.
19	
20	6.
21	8,25.
22	En el primer piso.
23	941 y 873.
26	11, 13, 16, 18 y 23.
27	$k = 0$.
28	$\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < 2\sqrt[6]{2}$.
29	$(1998, 2000)$, $(998, 1001)$.
30	92.

	FEBRERO
2	179 años.
3	4.
4	Décimas.
5	225.
6	7.
9	Bs. 19,10.
10	10 g.
11	118 segundos.
12	10 cm.
13	3.
16	885.
17	75.
18	6.
19	18cm.
20	0.
25	5.
26	10.
27	2.

	MARZO
2	100 letras.
3	$n = 1$.
4	9 metras.
5	180 cm^3.
6	$n = 2001$.
9	840.
10	3 hijos. 12, 11 y 5 años.
11	7.
12	$A = 60, B = 30$ y $C = 90$ ó $A = B = C = 60$
13	$(a, -2a, 4a)$ para $a \neq 0$.
16	2 niñas.
17	$\frac{8}{27}$.
18	1981 metras.
19	99 %.
20	7.
23	3087.
24	5 cartas.
25	50.
26	16.
27	20.
30	8.
31	7^4.

	ABRIL
1	72.
2	50 m.
3	42.
13	6.
14	576.
15	324.
16	80.
17	2.
20	20.
21	1.
22	1.
23	$\frac{4}{5}$
24	612.
27	29.
28	80 cm.
29	667.
30	3.

	MAYO
4	32π m.
5	60.
6	Marzo 31 de 2025.
7	
8	ni 2 ni ningún $n > 6$.
11	8.
12	300.
13	30.
14	96 cm.
15	4.
18	8.
19	818.
20	1.
21	420.
22	78.
25	$\frac{1}{2\pi}$.
26	3.
27	2009.
28	2.
29	1.

	JUNIO
1	10.
2	Una solución: 6 y 7.
3	3 dulces.
4	20 vueltas más.
5	16 maneras.
8	5 u^2.
9	1, 3 y 9 kg.
10	16 veces.
11	A las 10 horas 30 minutos.
12	125.
15	2290.
16	15 autos.
17	4 hermanas.
18	50 ”biyus” semanales.
19	262 páginas.
22	164 y 192.
23	El hermano de Irene.
25	18.
26	906,25 y 580,50 respectivamente.
29	11.
30	30.

ESTUDIANTES VENEZOLANOS EN COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN 2008

Estudiantes venezolanos participantes en la ORM y la OJM, y delegaciones que representaron a nuestro país en la XI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC) realizada en San Pedro Sula, Honduras; la XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM) realizada en Salvador de Bahía, Brasil; y la 49va Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO por sus siglas en inglés) realizada en Madrid, España.

OMCC: Jefe de Delegación: José Heber Nieto, Tutor: Silvina de Jesús, Estudiantes: Miguelángel Dahdah (Mención Honorífica), Jesús Rangel (Medalla de Bronce), Tomás Rodríguez (Mención Honorífica).

OIM: Jefe de Delegación: Henry Martínez, Tutor: Eduardo Sarabia, Estudiantes: Carmela Acevedo (Mención Honorífica), Estefanía Ordaz (Mención Honorífica), Jesús Rangel, David Urdaneta (Mención Honorífica).

IMO: Jefe de Delegación: Rafael Sánchez, Tutora: Laura Vielma, Estudiantes: Sofía Taylor (Mención Honorífica), David Urdaneta.

	JULIO
1	una.
2	$3 < \sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{10}$
3	4.
6	52.
7	$x = 0$.
8	13 corredores.
9	$108\pi + \frac{81\sqrt{3}}{4}$ m ^{2}.
10	260 cm.
13	9 manzanas y 3 naranjas.
14	25 bolívares y 51 céntimos.
15	$S = 2\pi R^2$.
16	7744.
17	$\frac{5}{36}$
20	3 cm.
21	1.
22	1140.
23	41, 43, 45.
27	2.
28	60.
29	0.
30	600000 musarañas.
31	16,50 bolivares.

	AGOSTO
3	17 bombones.
4	EG.
5	21.
6	34.
7	3:00 y 9:00.
10	25.
11	9 años.
12	1312.
13	31.
14	7.
17	3:00 pm.
18	36.
19	$(4\times 4)+4$.
20	$4\frac{1}{2}$ tazas.
21	Tomás.
24	20 kg.
25	11.
26	100 g.
27	126.
28	25.
31	4.

	SEPTIEMBRE
1	$S = 4R^2$.
2	20412 iniciales.
3	$\frac{2}{3}$.
4	10 y 4.
7	20 cm ^{2}.
8	5.
9	121.
10	$54\sqrt{3} - 27\pi$.
11	$2^{24} - 1 = 16777215$ monedas.
14	14.
15	12.
16	$f(x) = -x + b$, y $f(x) = x$.
17	No es posible.
18	$\frac{118}{231}$.
21	703.
22	5.
23	$m = 3, n = 4$.
24	4, 5, 6.
25	6.
28	$f(x) = 1 - x^2$.
29	$n = 0$ y $n = 144$.
30	$R = 6r$.

	OCTUBRE
1	$\frac{3}{8}$.
2	14.
5	3.
6	88cm.
7	1.
8	27.
9	40.
13	612.
14	5.
15	10.
16	21.
19	36.
20	13.
21	$\frac{1}{2}$.
22	101.
23	13.
26	$\frac{2}{5}$.
27	37.
28	6.
29	$(6+5\pi)$ cm.
30	16.

	NOVIEMBRE
2	36 ambas.
3	5.
4	31 de julio 2024.
5	155 cartas.
6	358926471.
9	97 años.
10	-1, 2 y 5.
11	$\frac{5}{4}$.
12	8 chicos y 1 chicas.
13	Un rectángulo.
16	90 minutos.
17	5 lipras.
18	1386 sirios.
19	5.
20	300 veces.
23	7.
24	7.
25	46.
26	12.
27	3.
30	28.

	DICIEMBRE
1	24.
2	18.
3	uno.
4	15 cm.
7	5.
8	28 sellos.
9	4 mochuelos y 3 olivos.
10	P=6.
11	1028 páginas.
14	259.
15	$\frac{5}{7}$.
16	4 veces.
18	966 cifras.
21	12.
22	3.
23	10 triángulos.
24	3 hermanas.
28	142857.
29	7.
30	15 manzanas.
31	54

ORM

Olimpíada Recreativa de Matemática

OJM

Olimpíada Juvenil de Matemática

Una actividad de

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

FUNDECOM
Fundación para el Desarrollo de Competencias Matemáticas

Y el soporte académico de

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Association Le Kangourou des Mathématiques

Kangourous sans frontières

Coordinador Nacional OJM
Rafael Sánchez Lamoneda

Coordinador Nacional ORM
Jorge Salazar

Recopilacion y Soluciones
Laura Vielma

Revision Académica
José Heber Nieto

Edicion y Diseño
Laura Vielma

Colaboradores
Fabiola Czwienczek
Douglas Jiménez
Alexis Rodríguez
Walter Meyer
Yolanda Serres
Yamilet Quintana
Mike Malatesta
Ignacio Iribarren
Lisandro Alvarado
Luis Cáceres

Con el patrocinio de

fundación EMPRESAS POLAR

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Of. 331.
Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela
Telefax: 212 605 1512.
e-mail: asomatemat8@gmail.com
Página Web: http://www.acm.org.ve
Página Web: http://olimpiadarecreativa.org