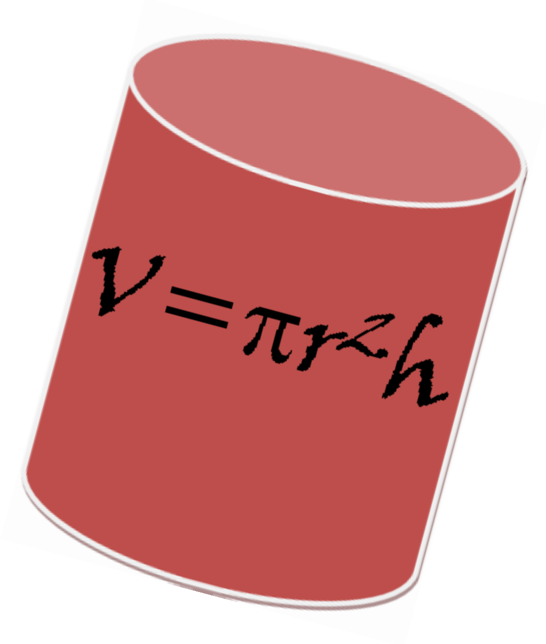
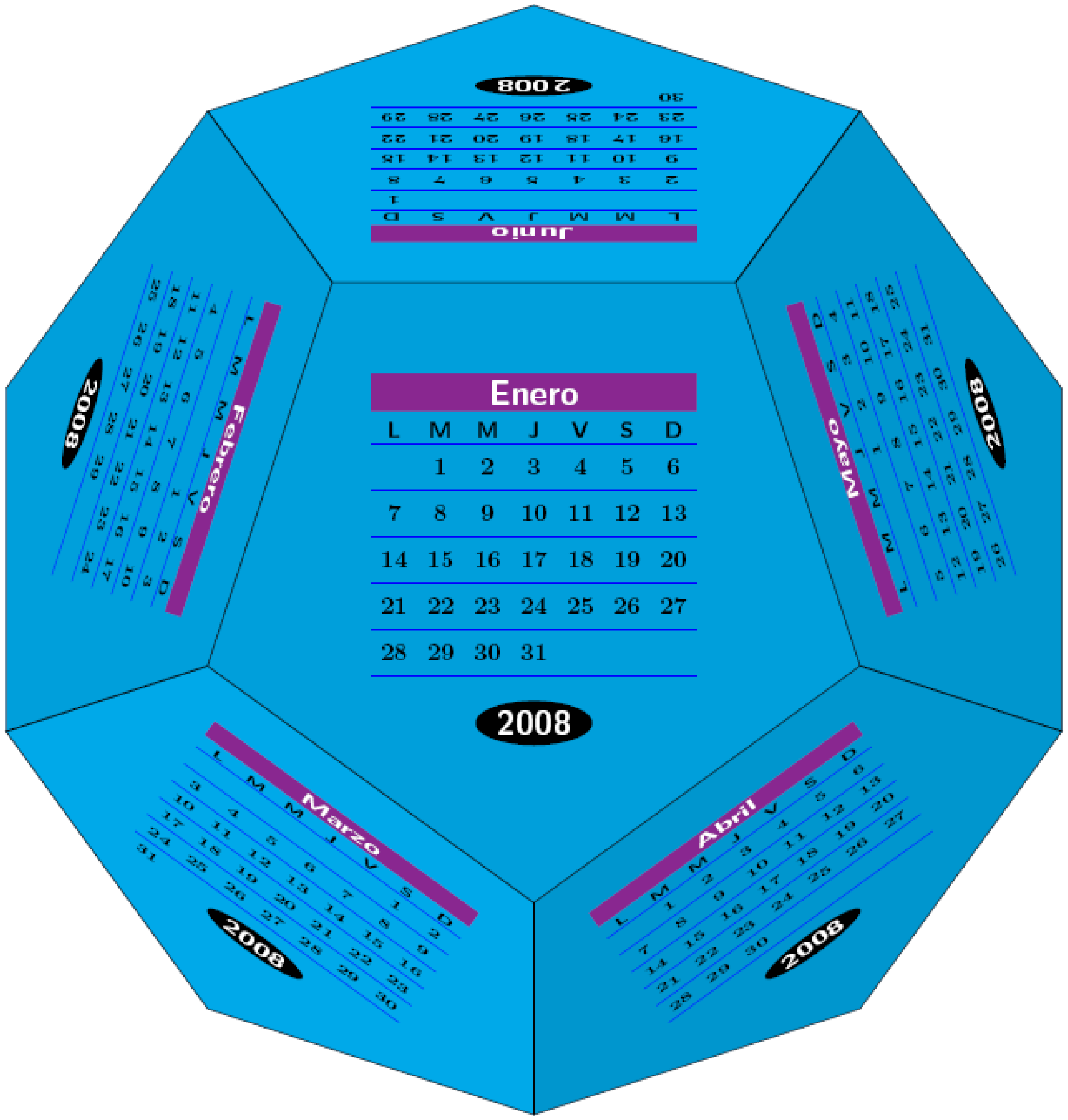
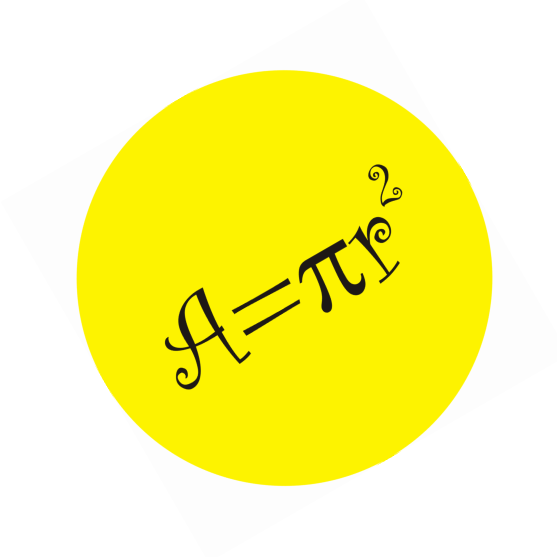
Calendario Matemático
2008

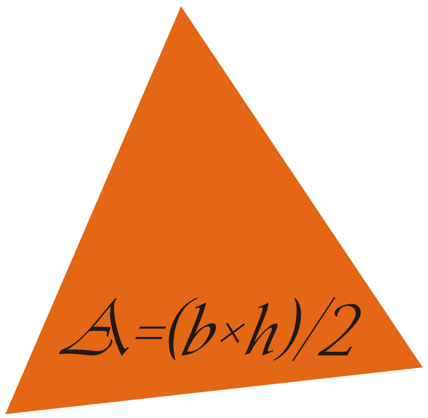


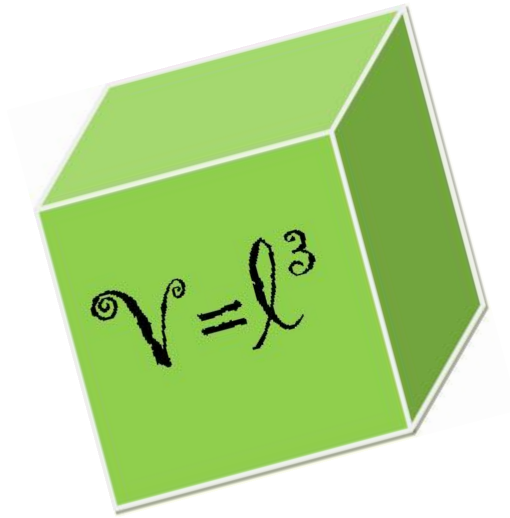




$\sqrt{2}$

$\cos(60°)$





ACM

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

La Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM, es una asociación civil sin fines de lucro fundada a finales del año 2000. Tiene como objetivos la promoción de la matemática entre los jóvenes en edad escolar, detectar aquellos que tienen gran interés por el estudio de esta ciencia y prepararlos de manera eficiente para la participación en competencias matemáticas nacionales e internacionales.

La ACM agrupa a profesores y matemáticos profesionales de varias universidades del país y tiene el apoyo de la Asociación Matemática Venezolana, AMV y la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. De esta manera en todas nuestras actividades disponemos de un personal altamente capacitado y de reconocido prestigio nacional e internacional.

Desde nuestra fundación hemos obtenido un total de 74 premios internacionales en las distintas competencias a las cuales hemos asistido, siendo los más importantes dos medallas de plata y dos de bronce en la 42° y 43° Olimpiada Internacional de Matemáticas, la Copa Puerto Rico y la Copa El Salvador. Estas copas son premios que se otorgan en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, y en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, OMCC, al país de mayor progreso académico en los dos últimos años de participación. Nosotros ganamos este premio en la XVI OIM, celebrada en Uruguay en septiembre de 2001 y en la VI OMCC celebrada en Nicaragua en Junio de 2004.

Internacionalmente participamos en las siguientes competencias:

- Olimpiada Internacional de Matemáticas. IMO.
- Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. OIM.
- Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. OMCC
- Olimpiada Bolivariana de Matemáticas. OBM.
- Olimpiada Matemática de Mayo. OMM.
- Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria. OIMU.

Para el año 2008 planificamos la organización de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM, dirigida a jóvenes de 7º grado hasta 2º del diversificado, con el Canguro Matemático, como certamen preliminar de ambas competencias. El Canguro Matemático es el concurso de matemáticas más grande del mundo y participan anualmente más de cuatro millones de estudiantes de Europa, Canadá, Ecuador, Estados Unidos, México, Paraguay, Pakistán, Puerto Rico y Venezuela. La participación es por estricta invitación de la Asociación Canguro sin Fronteras, cuya sede está localizada en París, Francia, y el examen es elaborado por profesores de todos los países participantes y adaptado a las características de cada país. Aunque el evento se organiza internacionalmente, la competencia es nacional. En el 2007 logramos una participación de más de 130.000 alumnos de 22 ciudades del país.

Junto a estos eventos, llevamos adelante un programa nacional de entrenamiento de estudiantes que comienza cada año en Octubre, consta de tres etapas y su finalidad es preparar a los jóvenes que competirán en las olimpiadas antes señaladas. Este programa de entrenamiento se realiza en varias ciudades del país con el concurso de profesores y estudiantes de las siguientes universidades: UCV, USB, UNEXPO, UC, LUZ, UPEL-IPC, UCAB, ULA, UCOLA y el IVIC. Los estudiantes que participan como entrenadores, son jóvenes con experiencia en olimpiadas como competidores y son ganadores de medallas en estas competencias. De esta manera vamos conformando una generación de relevo que comparte sus conocimientos y experiencias con los nuevos estudiantes. Para este año y luego de la experiencia en los años 2005 y 2006 y gracias al aporte de CANTV, hemos mejorado el programa de entrenamiento por Internet. Este programa nos permitirá ofrecer nuestra experiencia a estudiantes de todo el país, aunque en su región no haya un entrenamiento presencial, y además incorpora a estudiantes de otros países alentando así el intercambio de experiencias entre nuestros muchachos y sus pares en esos países.

El programa de entrenamientos se complementa con talleres cuya duración es de tres días, en los cuales trabajamos con grupos de estudiantes que se han destacado en el entrenamiento por internet. Estos talleres se hacen simultáneamente en la UCV, LUZ y Universidad de Carabobo.

En el año 2008 las competencias internacionales en las cuales participaremos se llevarán adelante según el siguiente cronograma:

- Canguro. 27 de Marzo.
- XIV OMM. Mayo.
- IX OBM. Mayo.
- X OMCC. San Pedro de Sula. Honduras.
- 49ª IMO. 10 al 22 de Julio. Madrid, España.
- XXIII OIM. Septiembre. Bahia. Brasil.
- XI OIMU. Octubre

Para mayor información se puede consultar nuestra página en la WEB: http://www.acm.org.ve

Rafael Sánchez Lamoneda

Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias.
Universidad Central de Venezuela.

ENERO 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 *Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.* **Hipatia**	**2** Román, Fabián, Laura, Javier y Adriana se encuentran en la misma fila. Roman está detrás de Laura. Fabián está antes de Román y justo después de Javier. Javier está antes de Laura pero él no es el primero en la fila. ¿Quién encabeza la fila?	**3** Carmen plantó una flor cada 2 metros en ambos lados del camino hasta llegar a su jardín. ¿Cuál es la distancia total del camino si ella logró plantar un total de 20 flores?	**4** El lado de un cubo mide 3 cm. Si el lado del cubo se incrementa por 1 cm., ¿Cuánto se incrementará el volumen del cubo?
7 ¿De cuántas formas es posible escoger un presidente y un vicepresidente de una asamblea de 20 miembros?	**8** Dos lados de un triángulo miden 7 cm y 4 cm, respectivamente. El ángulo entre los lados es 30°. Halle el área del triángulo.	**9** Halle la suma de todos los múltiplos de 3 entre 1 y 1000.	**10** Se tiene un vaso lleno de agua. Se sirve la mitad y se vuelve a llenar el vaso con la mitad de lo que se había servido. ¿Cuál es el porcentaje de agua que se tiene ahora en el vaso?	**11** Luis tiene Bs. 5000. Él quiere comprar 5 paquetes de barajitas por Bs. 800 cada uno y unos chicles por Bs. 300 cada uno. A lo máximo, ¿Cuántos chicles puede comprar Luis?
14 En una bolsa se tienen 2 metras rojas, 2 metras blancas, y 2 metras azules. ¿Cuál es el mínimo número de metras que se deben sacar al azar para tener al menos dos metras del mismo color?	**15** *Las abejas, en virtud de una cierta intuición geométrica, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material.* **Pappus de Alejandría**	**16** En el país maravilla existen 3 pueblos: A, B, y C. Del pueblo A a B existen 6 caminos directos que los conectan mientras que de B a C hay 4 caminos directos. ¿Cuántas maneras hay de llegar de A a C pasando por B?	**17** Una moneda es lanzada 3 veces. ¿Cuántas secuencias diferentes de cara y sello se pueden obtener?	**18** Pedro nació cuando su hermana Juanita tenía 5 años de edad. Ahora, Juanita tiene el doble de la edad de Pedro. ¿Qué edad tiene Pedro ahora?
21 Una moneda es lanzada 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 4 caras como resultado de las lanzadas?	**22** Un gimnasio cobra Bs. 44000 de inscripción y Bs. 30000 por mensualidad. Otro gimnasio cobra Bs. 99000 por inscripción pero Bs. 25000 por mensualidad. ¿En cuántos meses se iguala el costo?	**23** Hace 2 años, la edad de Ana era 8 veces la edad de William. Ahora Ana tiene 10 años. ¿En cuántos años tendrá William 10 años?	**24** Miguel tiene 36 globos para vender en la escuela. En el camino perdió $\frac{1}{3}$ de ellos. $\frac{1}{6}$ de los que vendió fueron para su amiga Carla y el resto se los vendió a sus profesores. ¿Cuántos globos vendió a sus profesores?	**25** ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los dígitos 0 y 7?
28 ¿Cuántos dígitos se necesitan para escribir todos los números de 1 al 100?	**29** Andrés tiene escrito en un tablero el número 51379052. ¿Cuál es el menor número impar que puede formarse borrando cuatro de los ocho dígitos?	**30** Juliana está vendiendo huevos frescos. A las 10 AM ha vendido la mitad de los huevos más uno. Al mediodía ha vendido la mitad de los huevos que le quedaban a las 10 AM más uno y decide no vender más. Ella vuelve a su casa con 26 huevos. ¿Cuántos huevos vendió?	**31** ¿Cuántos números cuadrados de tres dígitos existen tal que sus dígitos son números cuadrados a su vez? Recuerde que $0^2 = 0$.	

Representantes de Venezuela en Competencias Matemáticas en 2007




IMO 2007
HANOI - VIETNAM

Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe
Mérida, Venezuela, del 1 al 9 de Junio de 2007

xxii olimpíadas ibero-americanas de matemática




Delegaciones de estudiantes venezolanos representaron a nuestro país en la X Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC) realizada en Mérida, Venezuela; la XXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM) realizada en Coimbra, Portugal; y la 48va Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO por sus siglas en inglés) realizada en Hanoi, Vietnam. Estas delegaciones fueron conformadas por:

OMCC: Jefe de Delegación: Eduardo Sarabia, Tutor: Ángel López, Estudiantes: Estefanía Ordaz, Cheryl Sánchez, David Urdaneta (Medalla de Bronce).

OIM: Jefe de Delegación: Henry Martínez, Tutora: Silvina de Jesús, Estudiantes: Félix Morales, Sofía Taylor, Gilberto Urdaneta (Medalla de Bronce).

IMO: Jefe de Delegación: Rafael Sánchez, Tutora: Laura Vielma, Estudiantes: Carmela Acevedo, Sofía Taylor (Mención Honorífica), Gilberto Urdaneta.

FEBRERO 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes

1 (Viernes) En una caja hay metras rojas, verdes y azules. Un tercio de las metras son rojas, un cuarto de las metras son azules y las diez restantes son verdes. ¿Cuántas metras hay en la caja?

4 (Lunes) *Todo saber tiene de ciencia lo que tiene de matemática.*

Poincaré

5 (Martes) *Las matemáticas son la música de la razón.*

Silvester

6 (Miércoles) Luis quiere invitar a 7 amigos a la playa pero sólo tiene espacio para 4 de ellos. ¿De cuántas formas puede escoger al grupo que lo acompañará?

7 (Jueves) Una caja fuerte utiliza una clave de tres dígitos. Si se sabe que utiliza los números 1, 3 y 5. ¿Cuántas combinaciones hay que probar?

8 (Viernes) ¿Cuál es el valor de x en $x - 2 \div 3 + 4 = 5$?

11 (Lunes) En el mercado, 1 ganso equivale a 5 gallos. Cambian 1 pato y 2 gallinas por 3 gallos, y a 1 pato por 4 gallinas. ¿Cuántas gallinas debe dar Germán para recibir un ganso?

12 (Martes) Juan compró una bolsa de pasta que contiene 400 spaghettis de 15 cm de largo cada uno. Si él los pusiera de extremo a extremo para formar una única tira de pasta, ¿Qué longitud tendría esa tira?

13 (Miércoles) ¿Qué número debe reemplazar la letra X si los espacios del cuadrado se encuentran rellenas de acuerdo con una regla fija?

10	16	24
14	6	18
22	20	X

14 (Jueves) En una clase, cada niño le da a cada niña una tarjeta por el día de San Valentín. Si se entregaron 77 tarjetas en total, ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

15 (Viernes) El mínimo comun múltiplo de dos números es igual a 240 y su máximo comun divisor es igual a 8. Encuentre los números si se sabe que el menor de ellos tiene un único factor no incluido en el mayor?

18 (Lunes) Raquel nació en 1974 cuando su abuela tenía 49 años. ¿En qué año tendrá su abuela 77 años?

19 (Martes) Hay 9 postes de luz en un lado de la acera del parque. La distancia entre ellos es 8 metros. Una rana fue saltando desde el primer poste hasta el último. ¿Cuántos metros saltó la rana?

20 (Miércoles) Andrés tiene ahorrado Bs. 22500 para comprar una pelota que cuesta Bs. 60000. Por tanto, comenzó a vender periódicos para ganar más dinero a Bs. 300 por cada periódico vendido. ¿Cuántos periódicos tiene que vender para tener suficiente dinero para comprar la pelota?

21 (Jueves) Un jardín rectangular mide 40 m de ancho y 20 m de largo. Una reja con una puerta de 2 m de largo cerca el jardín. ¿Cuál es la longitud de la reja sin incluir la puerta?

22 (Viernes) Un sapo realiza 3 saltos en 4 segundos. ¿Cuántos segundos le toma al sapo hacer 9 saltos?

25 (Lunes) Tres hermanas casadas visitan a sus padres cada 2, 3 y 5 días respectivamente. ¿Después de cuántos días se conseguirán las tres hermanas en casa de sus padres?

26 (Martes) John aún es ágil, incluso dado que en 7 años va a tener el doble de edad que tenía hace 7 años. ¿Qué edad tiene John?

27 (Miércoles) ¿Cuál es el valor simplificado de la expresión

$$89 \times \frac{87}{88 \times 89} + \frac{1}{88}?$$

28 (Jueves) Un ciclista anduvo 11/2 Km en 1/3 de hora. ¿Cuántos kilómetros andará a la misma velocidad en 21/2 de hora?

29 (Viernes) Este 29 de febrero es viernes. ¿Cuál será el próximo año que sea bisiesto y en el que el 29 de febrero sea también viernes?

Una buena taza de té

Una tarde de verano al final de los años 20 en Cambridge, Inglaterra, tomaban té al aire libre un grupo de profesores y sus esposas. Una de las damas presentes insistía en que el sabor de una taza de té con leche era diferente dependiendo de si se mezclaban en la taza poniendo primero el té y después la leche, o si la mezcla se hacía en orden inverso, es decir, primero la leche y luego el té.

Puede parecer una discusión baladí, sin embargo en Inglaterra, y especialmente en esa época, ese era un tema que generaba polémica. Usualmente se asociaba la costumbre de echar primero la leche a las clases poco educadas. Incluso, se tenía para ellos el mote despectivo de *the mifs*, los *milk-in-first*, los que ponían primero la leche. Probablemente esto se hacía por razones de salubridad (si la leche se echaba antes, al poner el té hirviendo arriba era más fácil detectar si la leche estaba en mal estado), o incluso por la calidad del material del que estaban hechas las tazas. Prueba de lo relevante del tema es que incluso George Orwell escribió un ensayo sobre cómo preparar una *buena* taza de té[1] y para el centenario de su nacimiento, en 2003, la Royal Society of Chemistry hizo un estudio de las propiedades químicas de las mezclas, en la cual sugieren que es mejor echar primero la leche, al contrario de lo que se pensaba a principios del siglo XX.

Ronald A. Fisher, 1890 - 1962

Pero volvamos a Cambridge. Uno de los presentes aquella tarde era R.A. Fisher, uno de los padres de la estadística moderna. En seguida se le ocurrió someter a prueba la afirmación de la dama. ¿Era verdad que podía distinguir entre una taza de té a la cual se le había echado el té antes que la leche de una preparada al revés?

Supongamos que se preparan 8 tazas de té, 4 de ellas mezcladas en orden té-leche y 4 mezcladas en orden leche-té, y se le presentan a la dama de una en una, en forma desordenada. Se le pide que las clasifique en 2 grupos de 4 tazas cada uno, de acuerdo al orden en que ella crea que fue hecha la mezcla.

El experimento desató el entusiasmo de los científicos presentes. Todos se pusieron a mezclar tazas de té. Fisher entregó la primera de ellas a la dama. Ella saboreó un rato, y dijo que el té había sido echado antes que la leche. Fisher anotó la respuesta y enseguida le dio otra taza.

La idea detrás del experimento es que, si la dama realmente no pudiera discriminar, y acertara la clasificación de las 4 tazas té-leche (y por lo tanto las leche-té), el acierto se debería a la suerte (azar, en términos más precisos).

Hay $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2} = 70$ formas posibles de clasificar las 8 tazas en 2 grupos de 4 tazas cada uno, de las cuales sólamente una será la correcta. Esto significa que, si la dama realmente no sabe distinguir entre las dos formas de preparar el té, dará la respuesta correcta con probabilidad $\frac{1}{70} = 0{,}014$.

Supongamos que al hacer el experimento la dama clasifica 3 tazas bien y una mal (de cada tipo). ¿Es eso suficiente evidencia de que la dama sabe distinguir? ¿O es muy posible que una respuesta así sea obtenida por casualidad?

Ya sabemos que hay 70 formas posibles de clasificar las tazas. De ellas 16 tienen 3 tazas (de cada uno de los 2 grupos) bien clasificadas (hay 4 formas de hacer ésto) y una mal (4 formas de hacerlo también). De manera que hay una probabilidad relativamente alta, $\frac{16}{70} > 20\,\%$ de hacer esta clasificación simplemente por suerte.

¿Qué ocurriría si el experimento se hiciera con más tazas? Por ejemplo, si se usaran 12 tazas, 6 de cada tipo, se acertaría, adivinando, en la clasificación de las 6 correctamente 1 de cada 924 veces. Y se clasificarían 5 bien y 1 mal 36 veces de cada 924, de manera que equivocarse en 1 o ninguna taza por mera casualidad debería ocurrir sólo un 4 % de las veces. Es decir, si la dama hubiera acertado 5 o más veces en el grupo té-leche habiendo probado 12 tazas, sería razonable pensar que sí podía distinguir en qué orden había sido hecha la mezcla.

Dice alguien que estuvo presente[2] aquella tarde en Cambridge que la dama no se equivocó con ninguna de las tazas que le presentó Fisher...

NOTA: El primer libro que se escribió sobre el tema de cómo diseñar experimentos se debe, precisamente, a R.A. Fisher : *The Design of Experiments*, publicado por primera vez en 1937 (Oliver and Boyd), que contiene el capítulo *Mathematics of a Lady Tasting Tea*, donde se explican las bases matemáticas del experimento, pero no hace ninguna referencia a la dama del relato.

Alejandra Cabaña

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Valladolid, España.

[1]A Nice Cup of Tea, Evening Standard, 12 de enero de 1946
[2]David Salsburg, *The Lady Tasting Tea*, 2001, W. H. Freeman & Co.

MARZO 2008

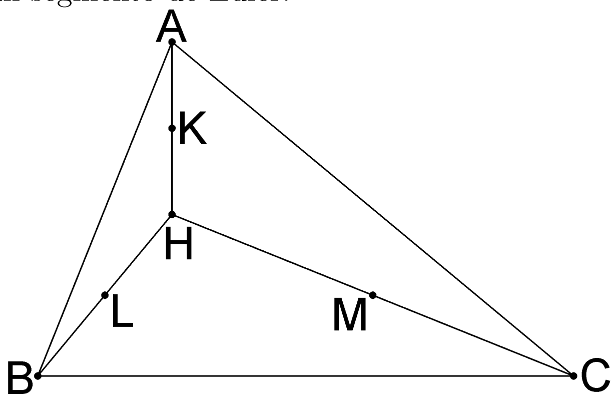
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 Un lago se cubre de hojas. La superficie del lago que se cubre cada día, después del primero, es igual a la superficie que estaba cubierta al iniciar el día. ¿Cuántos días pasarán para que la superficie se cubra por completo si la mitad ya se ha cubierto en 10 días?	**4** La expresión $995 \times 995 - 994 \times 996$ es igual a:	**5** Un cuadrado de 3×3 debe ser rellenado con rectángulos de 3×1 y 2×1. ¿De cuántas maneras puede ser rellenado?	**6** Luisa tiene 6 latas de 330 ml. de refresco. Ella quiere servirlas en vasos de 200ml. de capacidad. ¿Cuántos vasos puede llenar completos?	**7** Una bolsa con 30 metras pesa 650 gramos. Con 10 metras más pesa 800 gramos. ¿Cuántos gramos pesa la bolsa vacía?
10 Carolina, Lucía, Miriam y Paola cocinaban galletas. Juntas cocinaron 168 galletas. Carolina hizo el mismo número de galletas que Lucía así como Miriam hizo el mismo número de galletas que Paola. ¿Cuántas galletas cocinaron Paola y Lucía entre las dos?	**11** Hay nueces distribuidas en tres cajas. La primera caja tiene 99 nueces menos que las otras dos cajas y la segunda caja tiene 19 nueces menos que la primera y la tercera caja juntas. ¿Cuántas nueces contiene la tercera caja?	**12** Luisa puede comprar dos cambures por una manzana, y un limón por una manzana. Si Luisa tiene cuatro cambures, ¿cuántos limones puede comprar?	**13** 15 pelotas del mismo tamaño pueden colocarse para formar un triángulo, pero no se puede formar un cuadrado por falta de una pelota. ¿Con cuántas pelotas (más que 1, menos que 50) se puede hacer tanto un triángulo como un cuadrado?	**14** Cuando se divide el número A por 2007, el resultado es 1001 y su resto es 2006. ¿Cuál es el número A?
17 *No hay enigmas. Si un problema puede plantearse, también puede resolverse.* **Ludwig Wittgenstein**	**18** *Un matemático, como un pintor o un poeta, es un fabricante de modelos. Si sus modelos son más duraderos que los de estos últimos, es debido a que están hechos de ideas.* **G.H. Hardy**	**19** *No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.* **Nikolay Lobachevsky**	**20** *¡Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad!* **Albert Einstein**	**21** *Un matemático que no es también algo de poeta nunca será un matemático completo.* **Karl Weierstrass**
24 El área de un paralelogramo $ABCD$ es igual a 10. Si M y N son puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente, halle el área del cuadrilátero $MBND$.	**25** El valor de la expresión $(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2 - 3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ es:	**26** La solución de la ecuación $(x+2^{2007})^2-(x-2^{2007})^2 = 2^{2008}$ es:	**27** ¿Cuál es el número primo más pequeño que divide a la suma de $3^{11}+5^{13}$?	**28** ¿Qué digito se encuentra en las unidades de la suma de $11^{2007}+14^{2008}+16^{2009}$?
31 ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden conseguir con las letras de la palabra CANADA?				

El Círculo de los Nueve Puntos

La mayoría de los teoremas en matemáticas han surgido como curiosas casualidades que pueden ser demostradas para la generalidad de los casos. Un ejemplo de esto es que dado un triángulo con dos lados iguales, los ángulos opuestos a ellos serán iguales también generando un teorema para los triángulos isósceles. Además, es común en esta disciplina que el descubrimiento lleve el nombre del creativo matemático que lo encontró.

En 1765 el gran matemático suizo Leonhard Euler (1707 - 1783) demostró que la circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo es la misma circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de ese triángulo.

Definición 1. El segmento que une el ortocentro de un triángulo (punto de corte de las alturas de un triángulo que generalmente se llama H por *height* en inglés) con uno de sus vértices se llama *segmento de Euler* de ese triángulo. Se llama *punto de Euler* al punto medio de un segmento de Euler.



En la figura los segmentos AH, BH, CH son los segmentos de Euler. Sus respectivos puntos medios K, L, M son los puntos de Euler del triángulo ABC.

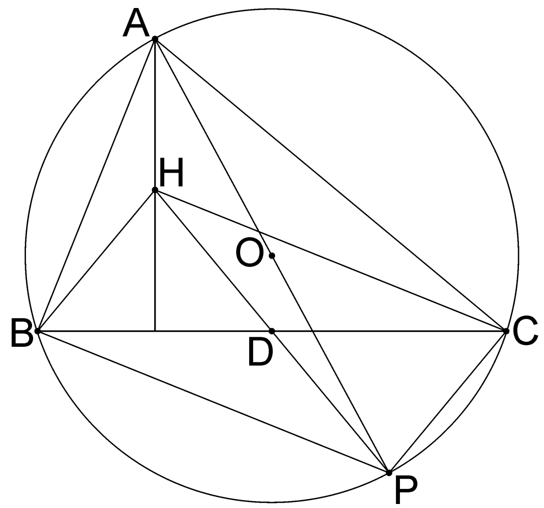
En cualquier triángulo hay tres segmentos de Euler y tres puntos de Euler.

En 1820 los matemáticos franceses Charles Julien Brianchon (1783 - 1864) y Jean Victor Poncelet (1788 - 1867) redescubrieron la circunferencia hallada por Euler y demostraron que dicha circunferencia también pasa por los puntos de Euler. Esta circunferencia fue llamada por ellos el **círculo de los nueve puntos.**

Definición 2. Se llama *segmento de Poncelet* de un triángulo a un segmento que une el ortocentro del triángulo con un punto de su circuncírculo. El circuncírculo es la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo y se denota regularmente con Γ. El punto medio de un segmento de Poncelet se llama *punto de Poncelet.*

Los puntos de Poncelet de un triángulo están en una circunferencia de radio la mitad del circunradio del triángulo (el circunradio es el radio del circuncírculo). Note que esta afirmación es cierta porque los puntos de Poncelet están ubicados en una copia del circuncírculo, reducida al 50 % de su tamaño y con esta reducción centrada en el ortocentro. Ahora bien, veamos que se tienen nueve puntos especiales del triángulo que son puntos de Poncelet y que por lo afirmado estarán en un mismo círculo, conocido como círculo de los nueve puntos.

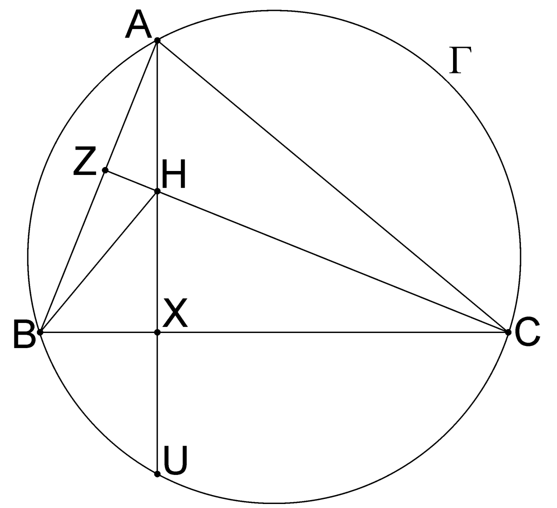
• El primer grupo son los tres puntos de Euler del triángulo que por definición son puntos de Poncelet.



• El segundo grupo son los puntos medios de los lados de un triángulo.

Mostremos que los puntos medios de los lados de un triángulo son puntos de Poncelet. Sea P el punto diametralmente opuesto al vértice A en Γ. El ángulo ACP es recto porque AP es diámetro lo que indica que CP es perpendicular al lado AC. Ya que BH es altura se sigue que CP y BH son paralelos. Análogamente, el ángulo ABP es recto porque AP es diámetro y al ser CH altura vemos que CH y BP son paralelas. Por tanto, la figura $HBPC$ es un paralelogramo y sus diagonales BC y HP se bisecan en el punto medio D, demostrando lo que se quería.

• El tercer grupo son los tres pies de las alturas del triángulo.



Mostremos que los pies de las alturas del triángulo son puntos de Poncelet.

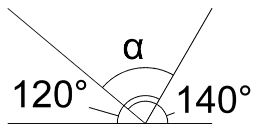
Sea U el punto de intersección de la altura AX del triángulo ABC con el circuncírculo Γ. Sea CZ otra altura. Los ángulos UCX y BAX son iguales al estar inscritos en el mismo arco BU. Los ángulos HCX y BAX son iguales por ser complementarios del mismo ángulo B en los triángulos rectángulos BCZ y ABX. Luego, los ángulos UCX y HCX son iguales y CX es bisectriz del ángulo C en el triángulo UCH. Como CH es perpendicular a HU se tiene que CH es también altura de ese triángulo y, por tanto, será mediana. Vemos entonces que $HX = XU$, probando lo que se quería.

Por tanto, con los tres puntos de cada grupo se conforman los nueve puntos por donde pasará una única circunferencia, llamada el círculo de los nueve puntos.

Darío Durán C.

Facultad de Humanidades y Educación
La Universidad del Zulia

ABRIL 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 Cinco cartas son sacadas al azar del mazo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 5 cartas de corazones?	**2** Un padre de 33 años tiene dos hijos de 10 y 11 años. ¿En cuántos años la suma de las edades de los hijos será igual que la edad del padre?	**3** Una clase con 15 estudiantes se sientan en 5 filas de 3 niños cada una. Un estudiante nuevo llega al salón. Como ellos se quieren sentar con el mismo número de estudiantes en cada fila, ¿Cuántas filas deben formar ahora?	**4** La mitad de los huevos que habían en una cesta son sacados de la misma. Luego, la mitad de los restantes fueron sacados y posteriormente, la mitad de los que quedaban en la cesta. Si al final, sólo quedaron 10 huevos, ¿Cuántos huevos había al principio en la cesta?
7 Un coro tiene 32 miembros, 12 de los cuales tocan un instrumento. 8 de estos 12 son varones. 60 % de las mujeres del coro no tocan un instrumento. ¿Cuántas mujeres hay en el coro?	**8** Se tienen un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero CDF que comparten el lado CD pero sus áreas no se cruzan. El valor de $\angle BAF$ es igual a:	**9** Verónica corta un papel que tiene forma de cuadrado con perímetro 20 cm en dos rectángulos. El perímetro de uno de los rectángulos es de 16 cm. ¿Cuál es el perímetro del otro rectángulo?	**10** Un entero de tres dígitos se divide por 9. Como resultado, la suma de sus dígitos decrece por 9. ¿Cuántos números de tres dígitos cumplen con esta propiedad?	**11** Los dígitos de un número x de dos dígitos han sido intercambiados y el resultado sumado al número x. La suma obtenida es un número cuadrado. Halle la suma de los dígitos de x.
14 Dos rectángulos son semejantes. El primero mide 4 cm de largo y 15 cm de ancho. El segundo mide 9 cm de largo. Halle el ancho del segundo rectángulo.	**15** Ana tiene cinco cajas separadas. Cada caja tiene 5 paquetes separados de caramelos. En cada paquete hay 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Ana?	**16** Halle el número más pequeño de tres números enteros consecutivos que suman 48.	**17** Una tienda promociona CDs en descuento con un 33 %. Si el disco cuesta Bs. 56000, ¿Cuánto se pagará por el CD con la oferta?	**18** El diamante de beisbol es un cuadrado. La distancia entre cada base y la siguiente es 90 pies. ¿Qué distancia, en un número entero de pies, debe recorrer una pelota lanzada por el catcher hasta segunda base aproximadamente?
21 En el triángulo ABC, el $\angle B$ se obtiene aumentando en 50 % el $\angle A$ y también reduciendo en 25 % el $\angle C$. La medida de $\angle B$ es:	**22** Halle la medida del ángulo α. 	**23** ¿Cuántos dígitos tiene el número $10^{2007} - 2007$?	**24** Antonio escribe todos los números de cuatro dígitos en los cuales el producto de sus dígitos es 6. Luego suma todos estos números. ¿Cuál es el valor que obtiene Antonio?	**25** El ancho del marco de un portaretrato rectangular es 2 cm. Si la zona para la foto tiene lados 32 cm y 24 cm, ¿cuál es el área del marco?
28 36 estudiantes pertenecen al grupo de 4A de los cuales 18 son varones. 23 estudiantes tienen ya 10 años. 6 niñas aun tienen 9 años. ¿Cuántos varones tienen 9 años aún?	**29** Dos chicos y una niña son amigos. Ellos tienen de iniciales de sus nombres A, B, y C. Una letra entre A y B es inicial de varón, una letra entre B y C es inicial de otro varón. ¿Cuál es la inicial del nombre de la niña?	**30** Pedro pensó en un dígito y le escribió otro a su derecha. Al número obtenido le sumó 19 y obtuvo como resultado 72. ¿Qué número pensó Pedro?		

¿Qué es un Sistema Dinámico para la Matemática?

Se llama Sistema Dinámico a cualquier conjunto de elementos interrelacionados e interactuantes, cuyos estados evolucionan con el tiempo. Esta es, actualmente, el área de la matemática donde se estudian procesos de evolución temporal; en ella se conjugan muchas áreas del conocimiento con el principal objetivo de predecir estados futuros de los sistemas modelados. Un apasionante objetivo, una vez que la predicción de estados futuros, aunque determinista, depende de una descripción, a veces probabilística, de acciones pasadas y condiciones iniciales para poder emitir un juicio.

Desde este punto de vista, y gracias al notable desarrollo teórico que se ha venido produciendo en las últimas cuatro décadas, los Sistemas Dinámicos son empleados como herramienta fundamental en el estudio de problemas importantes en todas las áreas. Esta influencia es tan variada que permite modelar procesos como propagación de epidemias, fluctuaciones en las bolsas de valores, crecimiento de poblaciones, desórdenes sociales y evolución de sistemas psicológicos, entre otros.

El origen de los Sistemas Dinámicos se remonta e incluso se confunde con el nacimiento, hacia finales del siglo XVII, de la Mecánica Newtoniana fundada por Isaac Newton (1642-1727), que permitió explicar tanto las denominadas Leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas como las observaciones planetarias realizadas por Galileo. En el período comprendido entre la segunda mitad del siglo XVIII y la primera del XIX, fueron publicados varios trabajos en los que se desarrolló y fortaleció la Mecánica Newtoniana, fundándose lo que se denominó, en virtud de su caracter, Dinámica Analítica.

A pesar del origen marcado por el desarrollo de la teoría Newtoniana, es hasta finales del siglo XIX y comienzos del XX, con la publicación de varios trabajos de Henri Poincaré (1854-1912), que se habla propiamente de la teoría de los Sistemas Dinámicos. Con sus trabajos “Sur le problème des trois corps et les equations de la dynamique” y “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle”, abre definitivamente las puertas a la aparición de la teoría de los Sistemas Dinámicos, ya que allí se propone y desarrolla desde un punto de vista cualitativo el estudio de las ecuaciones diferenciales, soportado por fuertes resultados de Topología y Geometría. Con ello se deja de lado los grandes esfuerzos de matemáticos del siglo XIX, como Cauchy y Weierstrass, para la obtención explícita, por métodos analíticos, de las soluciones de estas ecuaciones; provocando crisis en la Dinámica Analítica y el surgimiento de la Teoría Cualitativa y Geométrica de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Finalmente, veamos qué se considera en matemática un sistema dinámico. Este objeto idealizado está constituido por un *espacio de fases* X, que según las necesidades puede estar provisto de ciertas estructuras matemáticas; una ecuación de evolución que rige los cambios temporales de los estados, por ende depende tanto de los elementos de X como de una variable temporal t que pertenece a cierto conjunto T (el conjunto de los tiempos), el cual separa los sistemas dinámicos en continuos (cuanto T es un conjunto como los reales o un intervalo de ellos) o discretos (cuando hay saltos entre los elementos del conjunto T, por ejemplo cuando se toman los enteros). De cualquier manera, la ecuación de evolución es representada por una transformación $\varphi : T \times X \to X$, de forma que para cada tiempo $t \in T$ y cada estado $x \in X$, $\varphi(t, x)$ representa el estado hacia el cual evoluciona el estado x una vez transcurrido el tiempo t. Algunas condiciones adicionales se imponen a esta ley de evolución temporal. En primer lugar cuando $t = 0$ no hay evolución; esto es, para cada $x \in X$ se debe cumplir $\varphi(0, x) = x$. Por otra parte, dado un estado x cualquiera, observar su evolución en $t = t_1$ (esto es $\varphi(t_1, x)$) y a partir de este nuevo estado observar la evolución en $t = t_2$ (que es el estado $\varphi(t_2, \varphi(t_1, x))$) debe ser igual a partir del estado x y observar la evolución en $t = t_1 + t_2$ (esto es $\varphi(t_1 + t_2, x)$).

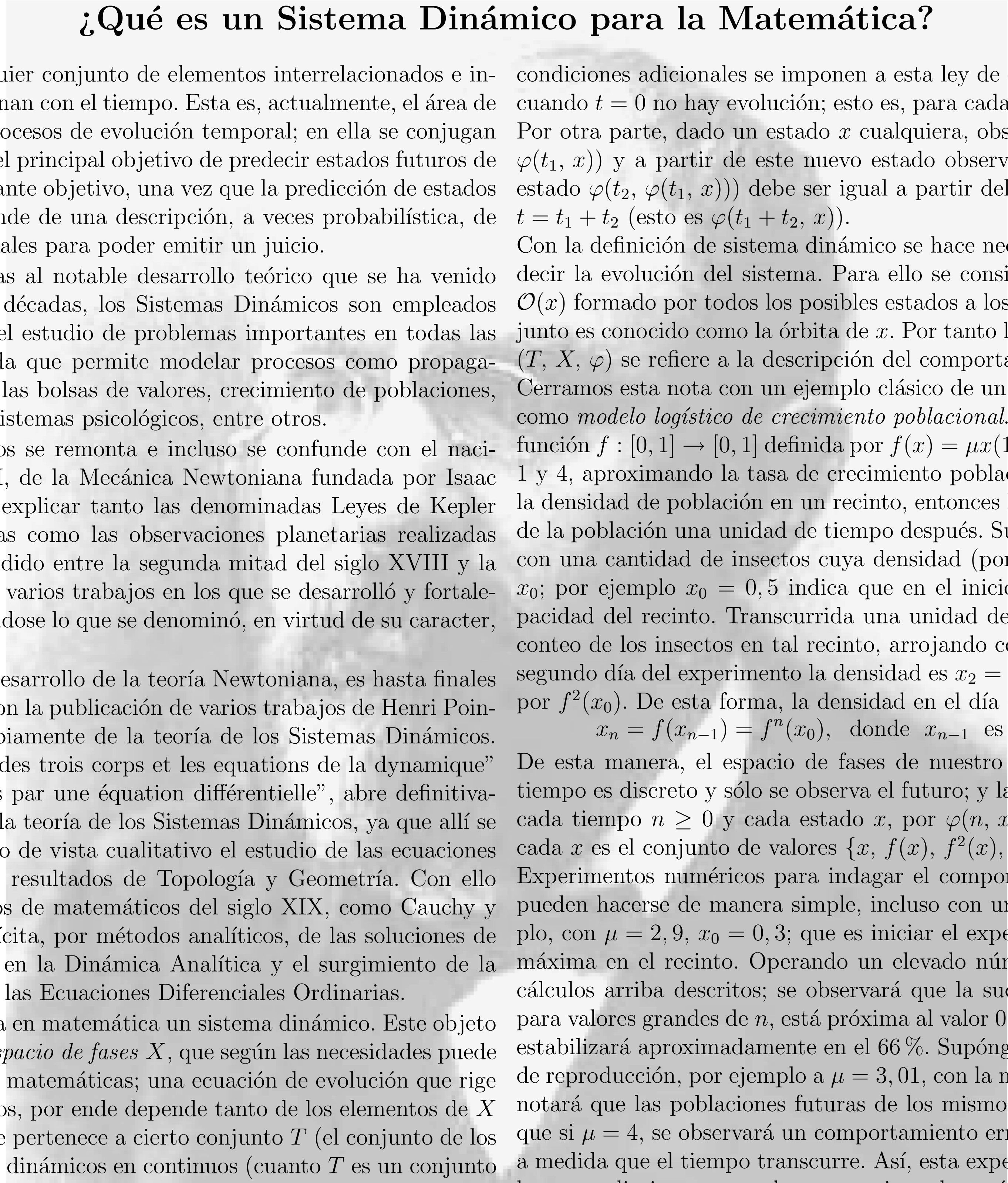
Con la definición de sistema dinámico se hace necesario explicar el significado de predecir la evolución del sistema. Para ello se considera, para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{O}(x)$ formado por todos los posibles estados a los cuales x puede evolucionar; tal conjunto es conocido como la órbita de x. Por tanto las predicciones del sistema dinámico (T, X, φ) se refiere a la descripción del comportamiento de las órbitas del sistema.

Cerramos esta nota con un ejemplo clásico de un sistema dinámico discreto, conocido como *modelo logístico de crecimiento poblacional*. Este sistema se expresa mediante la función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por $f(x) = \mu x(1-x)$, donde μ es una constante entre 1 y 4, aproximando la tasa de crecimiento poblacional. Si cada valor de x representa la densidad de población en un recinto, entonces la expresión $f(x)$ denota la densidad de la población una unidad de tiempo después. Supongamos que el experimento inicia con una cantidad de insectos cuya densidad (porcentaje de la población máxima) es x_0; por ejemplo $x_0 = 0,5$ indica que en el inicio la población es la mitad de la capacidad del recinto. Transcurrida una unidad de tiempo, digamos un día, se hace el conteo de los insectos en tal recinto, arrojando como densidad el valor $x_1 = f(x_0)$; al segundo día del experimento la densidad es $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$, la cual denotamos por $f^2(x_0)$. De esta forma, la densidad en el día $n \geq 1$ responde a la ecuación

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0), \text{ donde } x_{n-1} \text{ es la densidad del día anterior.}$$

De esta manera, el espacio de fases de nuestro sistema dinámico es $X = [0, 1]$, el tiempo es discreto y sólo se observa el futuro; y la ley de evolución φ es definida, para cada tiempo $n \geq 0$ y cada estado x, por $\varphi(n, x) = f^n(x)$. Claramente la órbita de cada x es el conjunto de valores $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$.

Experimentos numéricos para indagar el comportamiento de las órbitas del sistema pueden hacerse de manera simple, incluso con una calculadora de bolsillo. Por ejemplo, con $\mu = 2,9$, $x_0 = 0,3$; que es iniciar el experimento con el 30 % de la población máxima en el recinto. Operando un elevado número de veces, por ejemplo cien, los cálculos arriba descritos; se observará que la sucesion de estados $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$, para valores grandes de n, está próxima al valor $0,66$; esto significa que la población se estabilizará aproximadamente en el 66 %. Supóngase que los insectos cambian su tasa de reproducción, por ejemplo a $\mu = 3,01$, con la misma cantidad inicial de insectos. Se notará que las poblaciones futuras de los mismos oscilan entre dos valores; mientras que si $\mu = 4$, se observará un comportamiento errático en la densidad de la población a medida que el tiempo transcurre. Así, esta experimentación numérica no basta para hacer predicciones generales; se requiere algo más . . . estudiar más Matemática.



Henri Poincaré (1854-1912)

Neptalí Romero

Departamento de Matemática. Decanato de Ciencias y Tecnología.
Univ. Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela.

MAYO 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
			1 ¿Cuántos puntos hay en un dado?	**2** ¿Cuántos grados se mueve el minutero de un reloj cada minuto?
5 El promedio de cincuenta números es 38. Los números 45 y 55 son parte de esos cincuenta. Si quitamos de la lista estos dos números, entonces el promedio de los cuarenta y ocho restantes es igual a:	**6** Una caja contiene un gran número de monedas. Las monedas pueden repartirse en partes iguales entre 3, 4, 5, 6, 7 u 8 niños sin que sobren monedas. ¿Cuál es el menor número de monedas que puede contener la caja?	**7** ¿De cuántas maneras posibles se puede ordenar la lista de números $1, 2, 3, 4, 5$ y 6 tal que el producto de cada dos números consecutivos sea par?	**8** Un cuadrilátero es dividido en cuatro secciones por sus diagonales. Tres secciones tienen área 20, 5 y 6 respectivamente. ¿Si el valor del área de la cuarta sección también es un entero, cuál es ese valor?	**9** Seis números enteros se escriben seguidos en una línea. Cada uno de los cuatro primeros es igual al promedio de los dos que le siguen. Luego, la menor diferencia posible entre el primero y el último número es:
12 Un hexágono regular ABCDEF tiene perímetro 42 cm. Halle la longitud de BE.	**13** Juan gastó $\frac{2}{3}$ de su dinero en la tienda A. Luego gastó $\frac{1}{3}$ de lo que le quedaba en la tienda B. Cuando Juan salió de la tienda B tenía Bs 400. ¿Cuánto dinero tenía Juan al entrar en la tienda A?	**14** Si el número 6 es colocado a la derecha de un número de dos dígitos se forma un número de tres dígitos que es en 294 más grande que el número original de dos dígitos. ¿Cuál era ese número de dos dígitos?	**15** Cuando se suma 24 a un cierto número, el resultado es el mismo que cuando ese número es multiplicado por 3. ¿Cuál es ese número?	**16** Andrés tiene igual número de billetes de Bs. 5000 que de Bs. 20000. Si el valor total de los billetes de Bs. 20000 es Bs. 180000 más que el valor total de los billetes de Bs. 5000, ¿Qué valor suman todos los billetes que tiene Andrés?
19 Camila tiene un cubo de madera de 4 cm de largo. Ella lo pinta de azul y luego lo corta en cubos de lado 1 cm. ¿Cuántos de estos cubos tienen 2 caras azules?	**20** Un reloj digital muestra las 20:07. ¿Cuánto es el mínimo tiempo que debe pasar para que los mismos cuatro dígitos aparezcan de nuevo en el reloj en cualquier orden?	**21** El número 336 al ser dividido por un número natural n da como resto 2. Entonces, cuando 2007 se divide por n se obtiene como resto:	**22** ¿Con cuántos ceros termina el número $2007! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2007$?	**23** ¿Cuántos números primos p existen tal que $p^2 + 2$ es también primo?
26 Si se escriben todos los números impares de 1 hasta 301 inclusive, ¿Cuántas veces aparece escrito el dígito 3?	**27** $T37V$ es un número de cuatro dígitos donde las letras T y V representan dígitos diferentes. Si $T37V$ es divisible por 88, ¿Qué dígito representa la letra T?	**28** El cociente de dos números es 4 y su diferencia es 39. ¿Cuál es el menor de los dos números?	**29** Con las cifras 4, 5 y 6 se pueden construir seis números diferentes de tres dígitos cada uno. 546 es uno de ellos. ¿Cuál es la suma de estos seis números?	**30** ABCD es un cuadrado cuya diagonal AC mide 8 unidades de longitud. ¿Cuál es el área de este cuadrado?

El Máximo Común Divisor y el Algoritmo de Euclides

El máximo común divisor (MCD) de dos números enteros positivos se define como el mayor de todos los divisores comunes de tales números. Una de las clásicas formas de calcular el máximo común divisor de dos enteros positivos requiere de la descomposición en factores primos de éstos para luego elegir de cada fator primo común su potencia con el menor exponente y multiplicarlas. Por ejemplo, si quisiéramos calcular el máximo común divisor de 180 y 126 tendríamos que la descomposición prima de cada uno de estos números sería $180 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $126 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ donde los factores primos comunes son 2 y 3 cuyos menores exponentes de sus potencias son 1 y 2, respectivamente. Luego, el $\mathrm{MCD}(180, 126) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Ahora presentaremos una forma muy particular de calcular el máximo común divisor de dos enteros positivos sin necesidad de realizar la descomposición prima de estos. Esta forma de cálculo está basada en el famoso **Algoritmo de Euclides**.

Discutiremos primero sobre dos importantes propiedades que debemos tener bastante claras antes de explicar en qué consiste este algoritmo.

La primera se basa en el hecho de que si un entero positivo a divide a un entero positivo b, entonces ¿cuál cree usted, amigo lector, puede ser el máximo común divisor de a y b? Analicemos un par de ejemplos previos...

No es difícil ver que el $\mathrm{MCD}(4, 12) = 4$ y que el $\mathrm{MCD}(15, 3) = 3$. Notemos que, en el primer caso, 4 divide a 12 y, en el segundo caso, 3 divide a 15.

Luego, estos ejemplos parecen conducirnos a la conjetura de que si a divide a b, el máximo común divisor de estos números debería ser a. La verdad, esta conjetura es cierta y fácil de probar. Si recordamos la definición de máximo común divisor y analizamos algunos detalles "técnicos", veremos que nuestra conjetura es cierta.

Todo entero no nulo se divide a sí mismo, por ello, a es un divisor de a. Además, si a divide a b, a es un divisor de b. Luego, a es un divisor común de a y b, pero ambos no pueden tener otro divisor común mayor que a dado que el mayor divisor del entero a es él mismo. Por tanto, probamos que $\mathrm{MCD}(a, b) = a$, siempre que a divida a b.

Por otro lado, vamos a discutir ahora un resultado más sorprendente que el anterior si suponemos que a y b son enteros positivos tales que a es mayor que b, b no divide a a y que, por ende, al aplicar el algoritmo de la división obtenemos un cociente q y un resto r tales que $a = bq + r$ y $0 < r < b$. Analicemos, antes un par de situaciones.

Al dividir, por ejemplo, 72 entre 20, obtenemos que el cociente de la división es 3 y el resto es 12, es decir, $72 = 20 \cdot 3 + 12$. Notemos el curioso detalle de $\mathrm{MCD}(72, 20) = \mathrm{MCD}(20, 12) = 4$, es decir, que el máximo común divisor del dividendo y el divisor es el mismo que el máximo comun divisor del divisor y el resto. ¿Será que este hecho es una casualidad? Veamos otro ejemplo...

Si ahora dividimos 60 entre 42, obtendremos $60 = 42 \cdot 1 + 18$ y podemos observar que $\mathrm{MCD}(60, 42) = \mathrm{MCD}(42, 18) = 6$.

Los resultados previos parecen indicar que es posible que si $a = bq+r$, donde $0 < r < b$, entonces $\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(b, r)$ ocurre. Y sí, lo afirmado anteriormente es cierto y podemos probarlo también. Supongamos que $\mathrm{MCD}(a, b) = d$ y que $\mathrm{MCD}(b, r) = d'$.

Como d es un divisor común de a y b, entonces d divide a bq (por ejemplo, 4 divide a 8 y, por tanto, 4 divide también a cualquier múltiplo de 8 como $8 \cdot 3 = 24$). Pero si d divide a a y a bq, entonces divide a la diferencia $a - bq$, que es r (por ejemplo, 3 divide a 27 y a 12, y a la diferencia $27 - 12 = 15$). Luego, tendremos que d es también un divisor común de b y r y como d' es el mayor de los divisores comunes de b y r (por ser el máximo común divisor de ambos) entonces debe cumplirse que $d \leq d'$. Mediante un razonamiento muy similar al anterior tendremos también que $d' \leq d$. Y si $d \leq d'$ y $d' \leq d$, entonces $d = d'$, es decir, $\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(b, r)$.

Los resultados discutidos previamente nos conducen a un importante resultado que guarda relación con el máximo común divisor y el algoritmo de la división.

Euclides, 360 a.C. - 295 a.C.

Volvamos al problema inicial de calcular el $\mathrm{MCD}(180, 126)$. Primero, notemos que $180 > 126$ y que 126 no divide a 180, por lo que aplicaremos las siguientes divisiones sucesivas:

$$180 = 126 \cdot 1 + 54$$
$$126 = 54 \cdot 2 + 18$$
$$54 = 18 \cdot 3$$

Observemos que en cada división (salvo la primera) aparecen como dividendo y divisor los enteros que en la división anterior eran el divisor y el resto, respectivamente. Además, es importante destacar que la última división resultó ser exacta ya que 18 es un divisor de 54.

Así aplicando las dos propiedades discutidas, se tiene $\mathrm{MCD}(180, 126) = \mathrm{MCD}(126, 54) = \mathrm{MCD}(54, 18) = 18$, es decir, ¡¡¡hemos calculado el máximo común divisor de dos enteros positivos sin usar el método clásico!!!

El procedimiento aplicado es el **Algoritmo de Euclides** y se describe como sigue: Sean a y b enteros positivos. Si aplicamos reiteradamente el algoritmo de la división para obtener la serie de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1, & 0 &< r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2, & 0 &< r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & 0 &< r_3 < r_2 \\
&\vdots & &\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, & 0 &< r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n
\end{aligned}$$

entonces $\mathrm{MCD}(a, b) = r_n$, donde r_n es el último resto no nulo de la división reiterada. Notemos que el proceso anterior es siempre finito ya que tiene, a lo más, $b+1$ divisiones. Esto se debe a que la sucesión de restos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ es estrictamente decreciente y que todos ellos son no negativos.

Por otra parte, la prueba de este algoritmo resulta bastante simple al apoyarnos en las propiedades demostradas previamente. En efecto, tenemos que

$$\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(b, r_1) = \mathrm{MCD}(r_1, r_2) = \ldots = \mathrm{MCD}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \mathrm{MCD}(r_{n-1}, r_n) = r_n$$

Henry Martínez L.

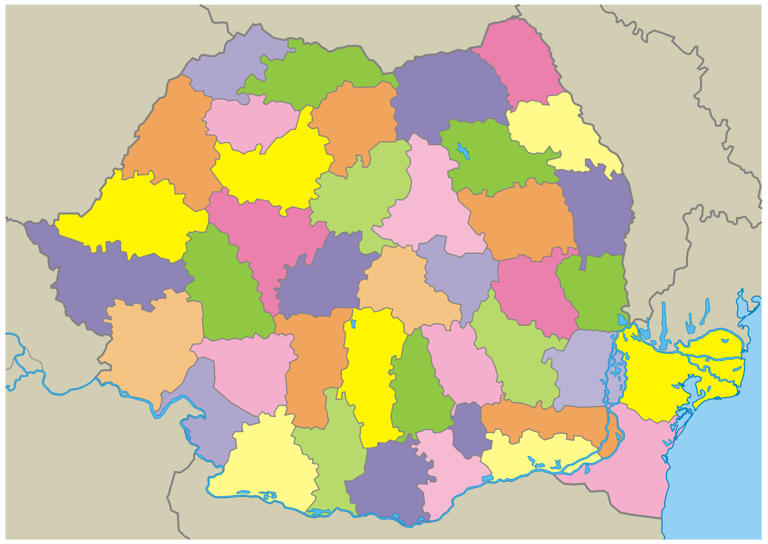
Instituto Pedagógico de Caracas
Universidad Pedagógica Experimental Libertador

JUNIO 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2 La medida de los lados de un triángulo rectángulo son números naturales. Si uno de los catetos (lado perpendicular) mide 99 mm., ¿Cuánto mide como mínimo la hipotenusa?	**3** Si se seleccionan tres números del conjunto $A = \{-5, 4, 3, -6, 2\}$ y se multiplican entre ellos, ¿cuál es el menor resultado que se puede obtener?	**4** Un entero positivo de cinco dígitos se llama *número duro* si no puede ser escrito como el producto de dos enteros de tres dígitos. ¿Cuál es la mayor cantidad de *números duros* consecutivos?	**5** Todos los números enteros positivos de tres dígitos fueron divididos por la suma de sus dígitos. ¿Cuál fue el mayor resto que se obtuvo de las divisiones?	**6** En el triángulo rectángulo ABC, C es ángulo recto, D la base de la altura correspondiente al vértice C, los puntos M, N y K dividen respectivamente a CD, BC y BD a razón de 1:2 y $CK = 3$, $AM = 4$. Halle AN.
9 En una caja hay gallinas y conejos. En total hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la caja?	**10** ¿Cuántos números naturales menores que 100 tienen la suma de sus cifras igual a 7?	**11** Si José comprara un cierto número de revistas a Bs. 15000 cada una, le sobrarían Bs. 10000. Pero si comprara el mismo número de revistas de las de Bs. 18000 cada una, le faltarían Bs. 2000. ¿Cuántas revistas pretende comprar José?	**12** Una llave llena un tanque en 10 horas. Otra llave llena el mismo tanque en 15 horas. Si abrimos las dos llaves al mismo tiempo, ¿En cuánto tiempo estaría lleno el tanque?	**13** Se tienen tres números, tal que, si se suman en parejas los resultados que se obtienen son 38, 44 y 52. ¿Cuál es el mayor de los tres números que se tienen?
16 Un número c se denomina *cuchi* si existe un número positivo b tal que la ecuación $$x^2 + bx + c = x$$ tenga dos raíces. ¿Cuántos números *cuchis* existen en la colección $-0,1$; $0,1$; $0,2$ y $0,3$?	**17** $ABCD$ es un paralelogramo. M y N son puntos medios de los lados BC y CD respectivamente. La razón entre el área del triángulo AMN y el área del paralelogramo $ABCD$ es igual a:	**18** ¿Cuál es el resto cuando se divide $3^{50} \cdot 5^{30} - 3$ por 15?	**19** Si $a + b = 24$ y $a^2 + b^2 = 204$, entonces $a^3 + b^3$ es igual a:	**20** En un triángulo ABC, D es el punto medio de AB, E es el punto medio de DB, F es el punto medio de BC. Si el área del triángulo ABC es 96, entonces el área del triángulo AEF es:
23 Los 32 estudiantes de un grado se ubican sobre el perímetro de un cuadrado de tal manera que en cada lado del cuadrado hay el mismo número de estudiantes. ¿Cuántos estudiantes deben estar ubicados en cada lado del cuadrado?	**24** A cierta hora del día, la sombra proyectada por una persona de 120 cm de estatura es de 40 cm de longitud. A la misma hora del día, ¿Qué longitud tiene la sombra que proyecta una persona de 180 cm de estatura?	**25** Una hormiga camina alrededor de un cuadrado de lado 1 metro, manteniéndose en todo momento a exactamente un metro de distancia del borde del cuadrado, ¿Cuál es el área aproximada encerrada por un circuito completo de la hormiga?	**26** Un estudiante resuelve un cierto número de ejercicios de matemáticas en un día, y en cada uno de los días siguientes el doble de los que ha resuelto el día anterior. Si al cabo de 5 días ha resuelto la tercera parte de los problemas, ¿En cuántos días los resolverá todos?	**27** En una circunferencia se marcan 30 puntos de tal manera que dos consecutivos siempre están a la misma distancia. Si enumeramos los puntos, en orden, con los números del 1 al 30, ¿Cuál es el número que está en el mismo diámetro opuesto al número 7?
30 Encontrar el menor entero positivo que no divide al producto de los primeros 100 enteros positivos.				

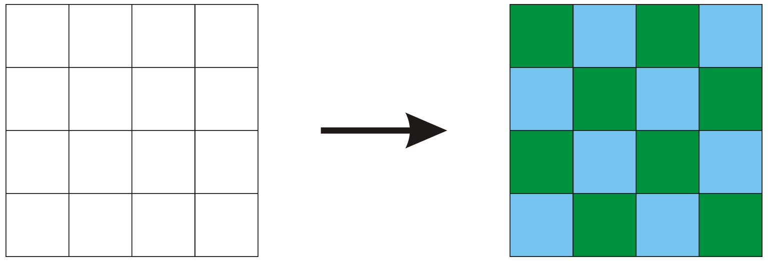
¿Cuántos colores se necesitan para colorear un mapa?

Es común encontrar en cualquier atlas o en internet mapas como el siguiente

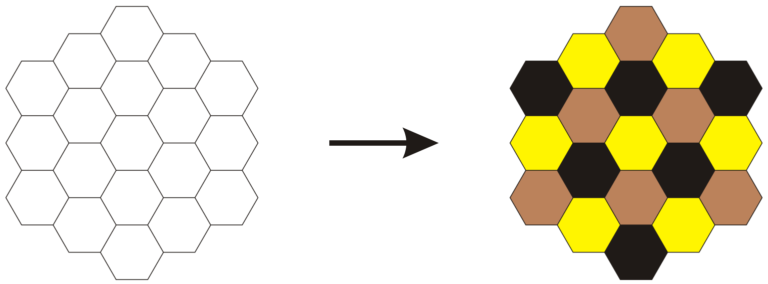


coloreados con muchos y muy vistosos colores. En algunos casos, sin embargo, cuando queremos hacer nosotros un mapa, queremos utilizar solamente algunos colores, en algunos casos queremos saber inclusive cuál es la menor cantidad de colores que debemos usar para poder pintar el mapa en forma que las regiones que comparten frontera no tengan el mismo color.

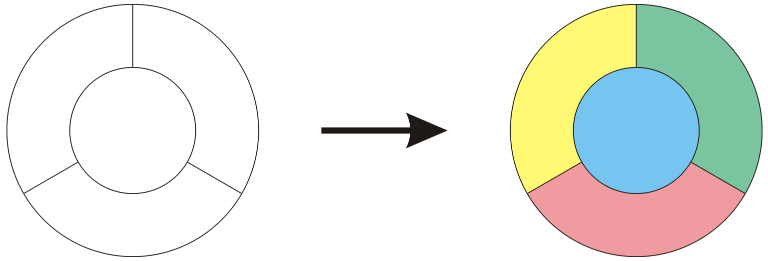
Cuando el mapa tiene una estructura similar a una cuadrícula, dos colores son suficientes coloreando en forma similar a un tablero de ajedrez.



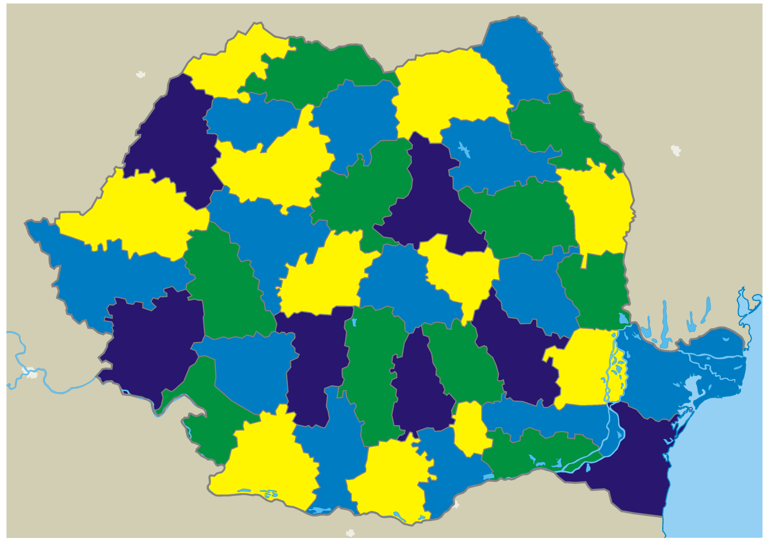
Sin embargo, en algunos casos esto no es suficiente, por ejemplo cuando el mapa tiene forma de colmena, como el que se muestra a continuación, se requieren tres colores.



Más aún, es posible que tres colores no sean suficientes, como en el caso que se muestra a continuación, en el que se necesitan cuatro colores.



En este punto terminan los casos en los que la cantidad de colores aumenta. Es conocido que, en cualquier mapa en el que dos territorios separados necesiten colores diferentes y en el que no se encuentren dos territorios separados que obligatoriamente tengan el mismo color, **cuatro colores son suficientes para colorear cada uno de los territorios del mapa**. Por ejemplo, el primer mapa mostrado en esta página, con los territorios coloreados en cuatro colores, se verá de la siguiente forma



Algunas veces cuando intentamos colorear un mapa con cuatro colores llegamos a un sitio en el que esto no es posible. No es cuestión de preocuparse, con seguridad siempre se puede hacer la coloración. Lo que puede suceder en esas situaciones es que hayamos elegido para alguna región un color que no convenía, es cuestión de volver a intentarlo desde unos pasos atrás.

Oscar Bernal

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

JULIO 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	1 Los círculos inscritos en un hexágono regular y de un triángulo equilátero son iguales. Si el perímetro del triángulo es 6, entonces el área del hexágono es:	**2** Un número entero de tres dígitos fue dividido por 9, pero la suma de sus dígitos no cambió. ¿Cuántos números de tres dígitos cumplen con esta propiedad?	**3** Se sabe que m es la raiz de la ecuación $x^3+1=2007x$ ¿Cuál es la raiz de $x^3+1=2007x^2$?	**4** Para cualquier entero n mayor que 0, $n!$ denota el producto de todos los enteros de 1 a n, inclusive. ¿Cuántos múltiplos de 3 hay entre $6!-6$ y $6!+6$, inclusive?
7 A una reunión familiar asistieron 200 personas y se sabe que hay tres veces más hombres que mujeres, y tantos niños como hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres asistieron a la reunión?	**8** Una rana salta sobre la recta numérica. Parte del cero con saltos de longitud siete y once alternativamente, es decir, cae en 7, 18, 25, 36, … ¿Cuál es el punto más cercano a 900 en el que la rana cae en alguno de sus saltos?	**9** Diana tiene 20 monedas en su monedero. Son monedas de 10, 20 y 50 bolívares, y su valor total es de Bs. 500. Si tiene más monedas de 50 que de 10 bolívares, ¿Cuántas monedas de 50 bolívares tiene?	**10** ABCD representa un número de cuatro dígitos. El producto de sus dígitos es 70. ¿Cuál es el mayor número de cuatro dígitos que puede estar representado por ABCD?	**11** Un coleccionista de estampillas compra una estampilla por Bs. 3000 y la vende en Bs. 4200, pero luego, vuelve y la compra por Bs. 5000 y finalmente la vende por Bs. 4800. ¿Cuánto dinero ganó el coleccionista al final del negocio?
14 Un polígono tiene 35 diagonales. ¿Cuántos lados tiene el polígono?	**15** Encuentre el valor de $\sqrt{2^3\sqrt{5^3\sqrt{2^3\sqrt{5^3\ldots}}}}$	**16** Los números x e y satisfacen las identidades $\frac{3}{x}-\frac{3}{y}=1$ y $y-x=1$. Entonces la suma $(x+y)^2$ es igual a:	**17** ¿Cuántos enteros de dos dígitos positivos tienen la propiedad de que el cuadrado de la suma de los dígitos es igual a la suma de los cuadrados de los dígitos?	**18** ¿Cuántas ternas de números reales (x,y,z) satisfacen el sistema de ecuaciones $xy=z$; $yz=x$ y $zx=y$?
21 ¿Cuál es el mayor número primo P tal que 9 veces P es menor que 400?	**22** ¿Cuántas veces deben utilizarce el 3 y 8 al escribir los números del 1 al 100?	**23** Encontrar el valor simplificado de la expresión $\frac{8!-6!}{3!\times 5!}$. $(n!=n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1.)$	**24** Se alquila un autobus por un determinado precio para transportar a un grupo de 30 personas. Al grupo se le unen 10 personas más. El costo del alquiler del grupo es el mismo, pero, el precio por persona se rebaja en Bs. 2000 cada una. Hallar el costo del alquiler del autobus?	**25** Suponga que dos días después del día de mañana será miércoles. ¿Qué día de la semana será 100 días después de hoy?
28 En una cometa $ABCD$, $AD=CD=10$, $ADC=60°$, $BAD=105°$. ¿Cuál es la medida de la diagonal BD?	**29** El último dígito del número $17^3\cdot 22^4\cdot 19^2\cdot 33^4$ es:	**30** En la ecuación $\overline{DCB}+\overline{CDB}=\overline{AABB}$ las letras A,B,C,D son diferentes dígitos. ¿Cuántas posibilidades hay para los valores de las letras?	**31** ¿Cuántos triángulos con lados de medidas enteras y diferentes y con perímetro 27 pueden ser construidos?	

La Regla Geométrica

Para un matemático, la regla geométrica clásica o euclídea es simplemente una cartulina, varilla o listón de material cualquiera, que permite trazar por uno de sus bordes un segmento de línea recta. Esta regla no posee ningún tipo de graduación y por lo tanto no sirve para transportar distancias ni para subdividir segmentos, esta es su principal diferencia con la tradicional regla métrica de los ”juegos de escuadrasütilizados en la escuela y el liceo. Sin embargo, independientemente de su naturaleza, si una regla permite trazar un segmento de recta también permitirá trazar (por superposición y reiteración) toda la recta que contiene al segmento originalmente trazado.

Con la idea anterior en mente, vamos a describir ahora la solución al problema básico de la regla euclídea: dados dos puntos A y B y una regla de longitud ϵ (menor que la distancia entre A y B) ¿cómo trazar la recta que une A y B?
El método a seguir (ver Fig. 1) es el siguiente: trace dos rectas arbitrarias r y r' que pasen por A, pero cuya distancia a B sea menor que ϵ. Marque un punto P exterior a r y r' y desde P trace tres segmentos arbitrarios a, b, c. La recta a cortará a r en Q y a r' en Q'; la recta c cortará a r en R y a r' en R'. Al trazar los segmentos QB y $Q'B'$ obtendremos dos puntos $S = QB \cap b$ y $S = Q'B' \cap b$. Entonces las rectas RS y $R'S'$ se cortan (precisamente) en un punto C colineal con A y B. Por construcción, el segmento CB ya puede trazarse y por lo tanto se puede construir la recta que une A y B.

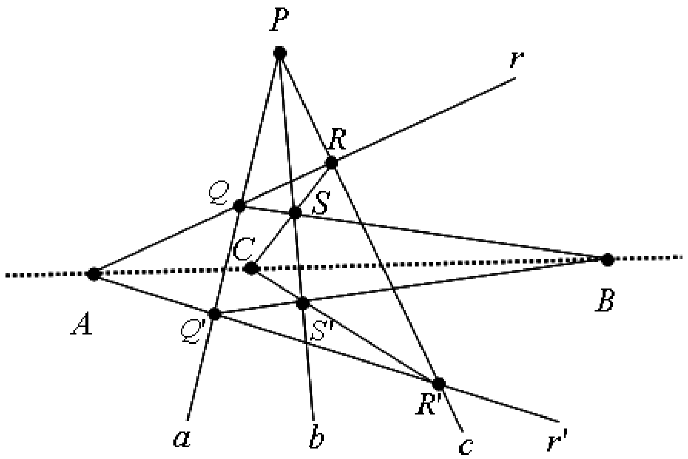


Figura 1. Construcción de la recta AB con una regla de longitud ϵ (menor que la distancia entre A y B).

Así pues, obtendremos el siguiente resultado

Resultado 1. *Dados dos puntos siempre podemos trazar la recta que los une utilizando cualquier regla geométrcia (independientemente de la longitud de ésta).*
Además de trazar una recta que pasa por un punto o la recta que une dos puntos arbitrarios, hay otras construcciones geométricas que siempre se pueden realizar simplemente con una regla.

Resultado 2. *Dado un segmento AB y su punto medio M, siempre se puede trazar con sólo una regla la paralela a AB que pasa por un punto arbitrario P, exterior a dicho segmento.*
Método de construcción: Trazando las rectas AP y BP y una recta arbitraria l desde B, podemos encontrar el punto $C = l \cap AP$. Si la recta MC corta a la recta BP en Q, resulta que la recta AQ cortará a l en un punto P' tal que la recta PP' es paralela a AB (ver Fig. 2).

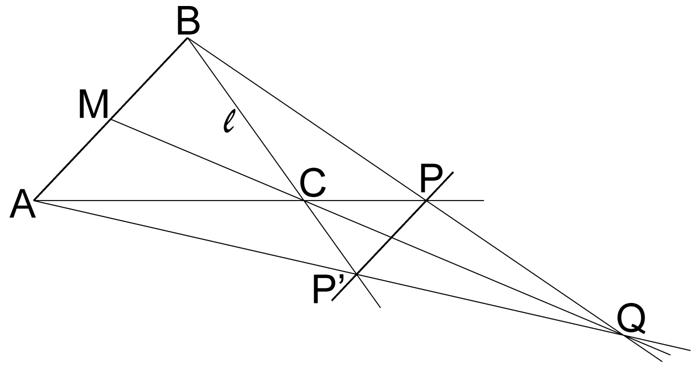


Figura 2. Construcción de la recta paralela AB, dado el punto medio M.

Sin embargo, existen multitud de problemas simples que **NO** son resolubles utilizando sólo una regla: Trazar el punto medio de un segmento, dibujar un triángulo dado un lado y dos ángulos o dos lados y un ángulo comprendido... etc. Clásicamente se ha superado la limitación intrínseca de la regla euclídea, introduciendo una herramienta complementaria: el compás.

Mike Malatesta

Escuela de Administración y Contaduría
Universidad Central de Venezuela

Yamilet Quintana

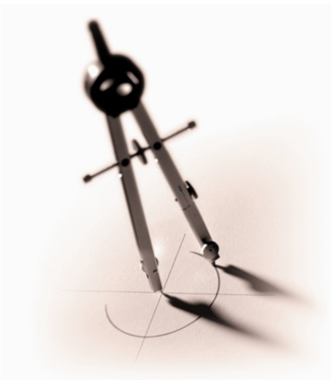
Departamento de Matematicas
Universidad Simón Bolívar

AGOSTO 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
				1 En una caja de fósforos hay un número de dos dígitos de fósforos. Pablo ve los dos dígitos y toma tantos fósforos como la suma de ellos. Luego, Olga cuenta los fósforos restantes dando un resultado entre 30 y 40. ¿Cuántos fósforos quedaban en la caja?
4 ¿Cuál es la suma de los primeros 15 múltiplos positivos de 6?	**5** Encontrar el factor más grande de 2520 que no es divisible por 6.	**6** Si la suma de cinco números impares consecutivos es 85, ¿Cuál es el mayor de estos cinco números?	**7** El número 104 es un número de tres dígitos y la suma de sus dígitos es $1+0+4=5$. ¿Cuántos números de tres dígitos, incluyendo el número 104, tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos sea 5?	**8** Pablo pagó el valor del pasaje de él y su amigo con un billete de Bs500, el valor de cada pasaje es de Bs150. El conductor le devuelve 7 monedas de Bs10, Bs20 y Bs50. ¿Cuántas monedas de Bs20 recibió Pablo?
11 ¿Cuál es el resultado de $9999994 \cdot 9999995 - 9999990 \cdot 9999999$?	**12** Milagros lanza dos dados ordinarios. La probabilidad de que el producto de los puntos de las caras superiores sea menor que la suma de estos es igual a:	**13** En una fiesta se sirvieron dos postres: helado y torta. Los 120 invitados comieron postre mientras que 24 repitieron. De los que sólo comieron una porción de postres, por cada 3 que comieron torta, uno comió helado. ¿Cuántos invitados comieron sólo torta?	**14** ¿Cuál es el valor de $A+B$ si A, B son enteros diferentes y $\frac{1}{3}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$?	**15** Un número entero se denomina *número ascendente* si cada dígito es mayor que el dígito a su izquierda. 2478 es un ejemplo de *número ascendente.* ¿Cuántos *números ascendentes* hay entre 4007 y 5007?
18 Se tienen tres luces intermitentes. Una alumbra cada 2 minutos, otra alumbra cada 2,5 minutos y una tercera alumbra cada 3 minutos. Si las tres luces coinciden en alumbrar a las 9 am., ¿Cuál es la siguiente hora en que ellas vuelven a coincidir?	**19** Se tiene un tobo lleno de agua y se introduce un ladrillo que desaloja 54 cm^3 de agua. Si el largo del ladrillo es el doble del ancho y el ancho y el alto son iguales, ¿Cuáles son las dimensiones del ladrillo?	**20** Cuatro amigos deciden hacer una colecta para una obra benéfica. El segundo da dos veces lo que dio el primero, el tercero da tres veces lo del segundo y el cuarto da cuatro veces lo del tercero. Si reunieron Bs26400, ¿Cuánto dio el primero?	**21** Un número de 21 dígitos consta de un 1 seguido de veinte ceros. ¿Cuál es el resto que queda al dividir este número por 7?	**22** Un ascensor abre sus puertas en un piso. Luego, sube 6 pisos, baja 4 pisos y vuelve a subir 3. Si el ascensor terminó en el piso 7, ¿En qué piso abrió sus puertas inicialmente?
25 En un trapezoide $ABCD$ con $AD//BC$, M es el punto medio del lado AB. Si $AD=a$, $DC=c$, $\angle DMC=90°$, entonces el valor de BC es:	**26** Sea N un número entero positivo. El resto de dividir N por 4 es 1 y el resto de dividir N por 5 es igual a 3. ¿Cuál es el resto de dividir N^2 por 20?	**27** Sea n el menor entero positivo que puede ser la suma de 9 enteros postivos consecutivos y de 10 enteros positivos consecutivos también. ¿Cuál es el dígito de las decenas de n?	**28** ¿Qué valor k entero positivo impar satisface la ecuación $17+19+21+\ldots+k=1700+k$?	**29** Si $f(x)=\frac{2x}{3x+4}$ y $f(g(x))=x$, entonces $g(x)$ es igual a:

Dos Compases

Existen multitud de compases diferentes de los dos que mencionaremos, los mismos griegos sugirieron una inmensa cantidad de mecanismos para sustituir el uso de la pareja regla-compás. Nosotros sólo presentaremos una breve descripción del compás euclídeo y el compás moderno, así como también algunas construcciones geométricas que pueden realizarse con cada uno de ellos.



El *compás moderno* es un mecanismo ciertamente complejo: no sólo porque permite trazar circunferencias sino porque, al poder mantener aberturas constantes, permite trasladar distancias y en particular trazar circunferencias de radio conocido. Es un compás con medida y es el que usualmente acompaña nuestro "juego de escuadras".

El *compás euclídeo* es el que "se cierra solo", es decir, el compás que permite, dados dos puntos A y B, trazar la circunferencia que pasa por A y tiene centro en B. A priori este compás (que es el clásico de la geometría de Euclides) no posee directamente la facultad de apreciar y trasladar distancias.

A pesar de ser mecanismos distintos, sorprendentemente, podemos realizar las mismas construcciones geométricas tanto con el compás euclídeo como con el compás moderno. Esta propiedad, es comúnmente expresada por los matemáticos a partir de la siguiente afirmación:

Resultado 1. *El compás euclídeo y el moderno son equivalentes.*

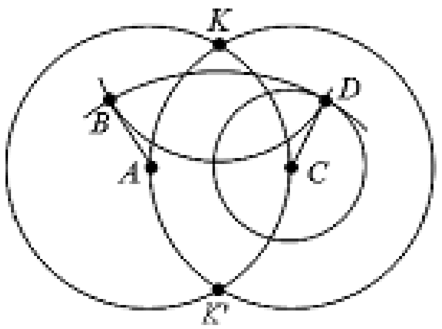


Figura 1. Equivalencia entre el compás euclídeo y el compás moderno.

Como con el compás moderno podemos trasladar distancias y trazar circunferencias de radio conocido, siempre podemos trazar con él las circunferencias que traza el compás euclídeo. De manera que para verificar la afirmación del **Resultado 1** sólo debemos mostrar que el compás euclídeo puede trazar las circunferencias como lo hace el compás moderno. Para ello verificaremos que dados tres puntos A, B, C puede trazar con el compás euclídeo la circunferencia de centro en C y radio $\overline{AB}$ como se puede observar en la figura 1.

En efecto, tracemos las circunferencias de centro en C que pasa por A y la de centro en A que pasa por C. Llamemos K y K' a los puntos de intersección de ambas circunferencias. Luego, tracemos la circunferencia con centro en K que pasa por B y la circunferencia con centro en K' que pasa por B. Estas dos últimas circunferencias se cortarán en otro punto D cuya distancia a C es (¡precisamente!) $\overline{AB}$. Finalmente, al trazar la circunferencia con centro en C que pasa por D queda verificada nuestra afirmación.

El poeta y geómetra italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800) publicó en 1797 la singular obra *Geometría del Compasso* en la cual demostró que *todas las construcciones euclídeas cuyos datos e incógnitas sean puntos, pueden resolverse utilizando sólo el compás* (y para ellas, por lo tanto, la regla es superflua; en otras palabras, el compás ideado como complemento de la regla, no sólo puede complementar sino incluso sustituir a la misma; bien entendido que el compás no trazará la recta entre dos puntos, pero podría marcar los puntos por donde pasa la recta buscada).

En 1928 -y por casualidad- se descubrió en una librería de Copenhage un libro titulado *Euclides Danicus*, publicado en 1672 por un autor desconocido hasta entonces en la literatura matemática: Georg Mohr. Resultó que Mohr ya había descubierto (con argumentos diferentes) el resultado de Mascheroni. Por eso a este bello argumento sobre el poderío del compás se le llama *teorema de Morh-Macheroni*. Para ilustrarlo daremos un ejemplo.

Ejemplo 1. *Dados cuatro puntos A, B, C, D de forma que C no esté en la recta AB, determinar, con sólo el compás moderno, los puntos de intersección de la recta AB con la circunferencia de centro en C que pasa por D.*

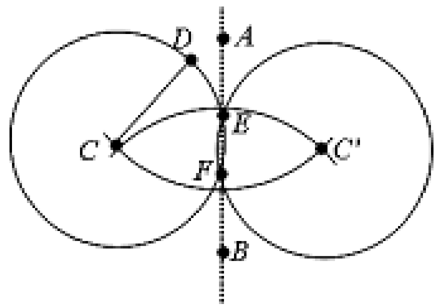


Figura 2. Un ejemplo de construcciones sólo con compás moderno.

Solución: Tracemos las circunferencias con centros en A y B que pasan por C. Ambas se cortarán en un punto C' distinto de C. Luego, trace la circunferencia de centro en C que pasa por D y la de centro en C' de radio $\overline{CD}$. Estas últimas circunferencias se cortarán en los puntos E y F que son, precisamente, las intersecciones buscadas con la recta AB.

Mike Malatesta

Escuela de Administración y Contaduría
Universidad Central de Venezuela

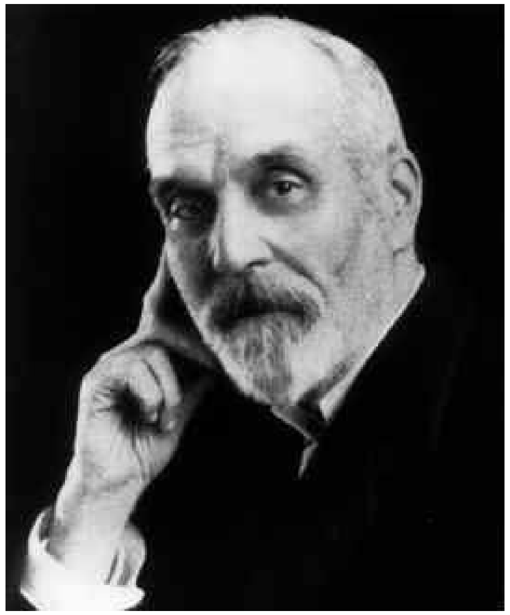
Yamilet Quintana

Departamento de Matematicas
Universidad Simón Bolívar

SEPTIEMBRE 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 La suma de los elementos del conjunto de números impares consecutivos 1, 3, 5, 7, . . ., N es 400. ¿Cuántos números impares hay en el conjunto?	**2** 6, 14 y 15 son factores del número natural N. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener N?	**3** Suponga que 5 días después de anteayer es viernes. ¿Qué día de la semana será mañana?	**4** Una caja contiene más de 100 metras. Cuando las metras se distibuyen en partes iguales entre 6, 7, u 8 niños, sobra una metra cada vez. ¿Cuál es el menor número de metras que puede contener la caja?	**5** Si a la tercera parte de un número se le suma 48 da como resultado el triple de ese número. ¿Cuál es el número?
8 ¿Cuántos números enteros n existen tal que $\frac{n}{20-n}$ sea un cuadrado perfecto?	**9** Sea $f(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1$. Si $y = f(x)$, entonces x en términos de y es igual a:	**10** Cuando 12 obreros trabajan juntos les toma exactamente 36 horas en descargar un cargamento de 20 cajas. Si 16 obreros fueran contratados para descargar estas cajas, ¿Cuánto tiempo demorarían en promedio en descargar una caja?	**11** Cada chico de la clase se hizo amigo de 4 niñas, y cada niña se hizo amiga de 5 chicos. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase si hay 3 niñas menos que chicos?	**12** ¿Cuánto es el mínimo número de años que tienen que pasar para que Bs. 100 invertidos al 10 % generen al menos Bs. 100 de interés?
15 El promedio de seis números es 7. Si se suprimen dos de los seis números el promedio de los cuatro números restantes es 8. ¿Cuál es la suma de los dos números que se suprimieron?	**16** $A6A41$ es un número de cinco dígitos donde las A's representan el mismo dígito. Si $A6A41$ es divisible por 9, ¿Qué dígito representa la letra A?	**17** El producto de tres números es 180. Si se sabe que dos de los números son iguales, ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de los tres números?	**18** Se adhieren 90 cubos de 1 cm de arista cada uno para formar un bloque de base rectangular. Si el perímetro de la base mide 10 cm, ¿Cuál es la altura del bloque?	**19** Un bosque tiene ahora 528 árboles. Si el primero de enero se plantó un árbol, y cada día se planta uno más que el día anterior, ¿En qué fecha se plantó el último árbol?
22 $\frac{sin 1^\circ}{cos 89^\circ}$ es igual a:	**23** Un cono y un cilindro, ambos de radio r y altura h, se encuentran en una posición tal que la mitad del volumen del cono se encuentra incluida en el cilindro. ¿Qué parte del cilindro se encuentra incluida en el cono?	**24** ¿Al menos cuántas personas deben haber en un café para poder asegurar que hay al menos dos personas del mismo sexo nacidos en el mismo mes?	**25** $(1+i)^8$ es igual a:	**26** Tomás nació el día del cumpleaños número 20 de su mamá y por tanto, comparten el mismo día de cumpleaños. ¿Cuántas veces la edad de Tomás será divisor de la edad de la madre si ambos viven vidas largas?
29 Al contar, en un grupo formado por camellos y dromedarios, se cuentan 48 patas y 20 jorobas. ¿Cuántos camellos hay? (Los camellos tienen dos jorobas, los dromedarios una)	**30** Una caja fuerte tiene tres ruedas, y cada rueda se puede colocar en los números de 0 al 9. Si la caja se abre cuando las tres ruedas están colocadas en números diferentes, ¿Con cuántas combinaciones se puede abrir?			

Otra Extraña Coincidencia



H. E. Dudeney, 1857 - 1930

"Los Gatos del Hechicero" es un libro de acertijos matemáticos escrito por el gran creador de problemas de ingenio, el inglés Henry E. Dudeney. En la sección Acertijos con Dinero, en el acertijo 1, el cual se intitula "Una Extraña Coincidencia", narra que siete amigos, Adams, Baker, Carter, Dobson, Edwards, Francis y Gudgeon, se empataron en un juego donde las reglas del mísmo imponían que el perdedor de cada partida duplicase el dinero de cada uno de los demás. La denominación de la moneda en juego es lo menos importante; pero para nuestra comodidad podemos suponer en miles de bolívares o, si usted prefiere, en bolívares fuertes.

Se jugaron siete partidas y cada apostador perdió una en el siguente orden; la primera la perdió Adams, la segunda Baker, la tercera Carter y así sucesivamente fueron perdiendo Dobson, Edwards, Francis y Gudgeon, una curiosidad pues perdieron en el orden alfabético de sus nombres; o como dijese Dudeney, una coincidencia.

La "Extraña Coincidencia" consiste en que al final del juego, todos tenían la misma cantidad de dinero en el bolsillo.

Hay "Otra Extraña Coincidencia" entre estos mismos jugadores no narrada por Dudeney, la cual originó este relato:

En una segunda oportunidad se juntaron de nuevo los siete personajes y de nuevo jugaron el mismo juego de la vez anterior y con las mismas reglas de juego, esto es, jugador que perdiera una ronda duplicaba el dinero a los restantes. Una vez más cada apostador perdió una partida y, coincidencialmente de nuevo, todos volvieron a perder en el orden alfabético de sus nombres; es decir, primero perdió Adams, seguidamente Baker y así sucesivamente hasta llegar a Gudgeon quien perdió la última partida; pero en esta ocasión la fortuna fue más justa con los apostadores porque en esta jornada, a diferencia de la anterior, no hubo caras tristes pues esta vez todos estaban felices y contentos porque además de haberse divertido muchísimo, ninguno de ellos perdió capital; es decir, no hubo ganador ni perdedor pues cada quien terminó el juego con la misma cantidad de dinero con que lo había iniciado, como debería ser en toda partida amistosa.

El acertijo consiste en calcular la mínima cantidad de dinero, en miles de bolívares, o bolívares fuertes, que cada apostador tenía consigo al momento de iniciarse el juego, así como calcular también la solución al acertijo propuesto por Dudeney en la "Extraña Coincidencia". Es importante tomar en cuenta la observación de mínimo, ya que si se encuentra una solución y luego se duplican las cantidades, el resultado (tener todos al final la misma cantidad o volver al dinero original, según corresponda) también se obtiene.

A Friend in Need, Cassius M. Coolidge, 1870

Solución expresada en miles de bolívares

Apostador	Capital inicial en Una Extraña Coincidencia	Capital inicial en Otra Extraña Coincidencia
Adams	449	64
Baker	225	32
Carter	113	16
Dobson	57	8
Edwards	29	4
Francis	15	2
Gudgeon	8	1

Diomedes Bárcenas

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
ULA Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela

OCTUBRE 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
		1 Cuando abro mi libro de matemáticas tengo dos páginas delante de mi. Si la suma de los números de las dos páginas es 317, ¿Cuál es el número de la página siguiente?	**2** La suma de las edades de Alicia, Betty y Clara es de 29 años. Si Betty es 4 años mayor que Alicia y Clara es 6 años mayor que Betty, ¿Cuál es la edad de Alicia?	**3** Un carro puede viajar un kilómetro en 1 minuto y 12 segundos. Con esta misma velocidad, ¿Cuántos kilómetros viajará el carro en una hora?
6 Andrés tiene escrito en un tablero el número 51379052. Si quiere borrar cuatro de esos dígitos para formar el menor número posible de cuatro dígitos (sin cambiar el orden en ningún momento), ¿Cuál es el producto de los dígitos que debe borrar?	**7** En un prado del bosque hay algunos pájaros y conejos hablando. Hay seis pájaros más que conejos, y hay seis patas de conejos más que patas de pájaros. ¿Cuántos animales están hablando?	**8** Susana juega con una caja que contiene sólidos de madera. Ella observa que 6 cubos pequeños pesan igual que 7 cilindros, 7 cilindros pesan igual que 3 cubos grandes y 2 cubos grandes pesan igual que un chocolate de 200 gramos. ¿Cuánto pesa, en gramos, un cubo pequeño?	**9** Pablo compró 5 Kg de manzanas, 3 Kg de peras y 4 Kg de uvas en el mercado por Bs. 16200. Los 5 Kg de manzanas costaron lo mismo que los 3 Kg de peras o los 4 Kg de uvas. ¿Cuánto tendría que pagar Pedro si él decide comprar 1 Kg de cada fruta?	**10** Se marcan 6 puntos en dos rectas paralelas L_1 y L_2, de manera que 4 puntos están marcados en la recta L_1 y 2 en la recta L_2. ¿Cuál es el número total de triángulos que pueden construirse tomando como vértices 3 de esos 6 puntos?
13 ¿De cuántas formas diferentes pueden ordenarse 8 personas en una fila en frente de una cafetería?	**14** La temporada psada, Edgar anotó 48 goles en el partido de fútbol. Eso fue 6 menos que el doble de los goles de Marcos. ¿Cuántos goles anotó Marcos en esa temporada?	**15** Halle el valor del tercer ángulo en un triángulo si los otros dos miden 66° y 50°?	**16** ¿Cuál es el mayor número natural más pequeño que 13^2 y que al mismo tiempo es divisible por 4 y por 6?	**17** Si los niños del curso de cuarto grado se separan en grupos de 5 niños, sobran 2 niños. Si el curso es separado en grupos de 6, sobran 3 niños. ¿Cuál es el mínimo número de niños que puede haber en el curso de cuarto grado?
20 Las llantas delanteras de una carreta tienen la mitad del radio de las llantas traseras. Si al recorrer un camino las llantas delanteras dan 80 vueltas, ¿cuántas vueltas dan las llantas traseras?	**21** Se marcan cinco puntos en el borde de una torta circular igualmente espaciados entre si. Si Carlos corta la torta por todas las líneas que unen dos de los puntos marcados, ¿cuántos pedazos de torta obtiene?	**22** Esteban pensó en un número natural. Nelson lo multiplicó por 5 ó por 6. Juan le sumó 5 ó 6 al resultado de Nelson. Andrés le restó 5 ó 6 al resultado de Juan. El resultado final fue 73. ¿Cuál fue el número en el que pensó originalmente Esteban?	**23** Miguel lanza 3 dados iguales y suma los números que obtiene. Él escribe los casos en que la suma es par y mayor que 8. ¿Cuántas posibles combinaciones puede obtener?	**24** La suma de dos fracciones positivas es $\frac{77}{65}$. ¿Cuál es la fracción mayor si los denominadores de ambas son menores que 65?
27 El número de tres dígitos $AB8$ es 296 más que el número de dos dígitos AB. ¿Qué número de dos dígitos representa AB?	**28** La suma de las estaturas de David y Fabio es 236 cm. Si la estatura de David es 20 cm más que la estatura de Fabio, ¿Cuál es la estatura de Fabio, en centímetros?	**29** Un reloj se adelanta 12 minutos cada hora. Si este reloj muestra la hora correcta a la 1 pm., ¿Cuál es la hora correcta cuando este reloj marque 2 pm.?	**30** Un grupo de 8 personas puede construir una pared de concreto en 6 días. Si 4 personas se unen en grupo desde el comienzo, ¿Cuántos días se toma el nuevo grupo para construir la pared?	**31** ¿Cuántos números pares entre 1 y 101 son múltiplos de 3?

Diagonalización

Voy a presentarles un poderoso método de razonamiento matemático y tres importantes ilustraciones de su uso. El método, que es conocido como DIAGONALIZACIÓN, se atribuye a Georg Cantor, quien lo utilizó por primera vez en sus investigaciones sobre los distintos tamaños que pueden tener los conjuntos infinitos.


G. Cantor, 1845 - 1918

Ilustración 1: Se usará la representación en binario de los números reales[3]. En ésta, a toda sucesión de ceros y unos corresponde un único número real y, recíprocamente, a todo real corresponde una sucesión donde cada elemento es 0 ó 1. Por lo tanto, hay tantos números reales como sucesiones de ceros y unos. Si suponemos que hay tantas sucesiones de ceros y unos como números naturales, concluimos entonces que podemos ordenar estas sucesiones en una lista tal como hacemos con los números naturales. Sea s_1, s_2, s_3, s_4, $\dots$ dicha lista, donde $s_i = s_{i1}s_{i2}s_{i3}\dots$ con $s_{ij} = 0$ ó 1. Sea $d = d_1d_2d_3\dots$ un número construido de forma que, para cada $i > 0$, $d_i = 0$ si $s_{ii} = 1$ o $d_i = 1$ si $s_{ii} = 0$. Hemos construido una sucesión d de ceros y unos que difiere de cada una de las sucesiones de ceros y unos en al menos un elemento; por lo que d no está en el conjunto de las sucesiones de ceros y unos, lo cual es absurdo.

Repasemos cómo se construye d: Se ponen las sucesiones s_1, s_2, s_3, s_4, $\dots$ una debajo de la otra, formando una tabla de ceros y unos, a partir de la cual se obtiene d *modificando los elementos de la diagonal* de la tabla. Hemos construido d por *diagonalización*, y tenemos el siguiente resultado:

Teorema (G. Cantor): *Existen más números reales que naturales.*

Ilustración 2: Un programa de computadora es una lista finita de instrucciones, donde cada instrucción es a su vez un conjunto finito de palabras. En consecuencia existen tantos programas o algoritmos como números naturales, y podemos entonces identificar estos conjuntos entre sí. Esto permite denotar tanto el $N-$ésimo número natural como el $N-$ésimo programa con la misma letra N. Una función F, parcialmente definida sobre los naturales y con imagen contenida en los naturales, es computable si existe un programa que al recibir por entrada un natural x da por respuesta otro natural y, siempre que $F(x) = y$; o en caso contrario el programa nunca se detiene (esto es cuando $F(x)$ no está definido); en la jerga de los computistas se dice que el programa queda "colgado".

Es obvio que el conjunto de las funciones parcialmente definidas en los naturales y computables no es mayor que el conjunto de todos los naturales, por lo tanto podemos hacer una lista de estas funciones. Ahora defínase la función G como: $G(N)$ es $1+$(la imágen de la $N-$ésima función parcial computable aplicada al natural N), o es 0 si tal $N-$ésima función no está definida en el natural N. Observe que si existiese un super programa que al recibir por entrada cualquier programa N y cualquier natural m, nos dice si N al procesar m se queda colgado o no, entonces G sería una función computable. Pero G no puede ser computable, o de lo contrario, si G fuese computable digamos por el programa N, entonces $G(N) = G(N) + 1$, lo cual es imposible.

Hemos obtenido así la solución negativa de Alan Turing al problema de determinar si cualquier programa dado se queda colgado o no, o "Problema de la Parada":

Teorema (A. Turing): *No existe un algoritmo que decida si cualquier programa se detiene eventualmente o no.*


A. Turing, 1912 - 1954

Veamos como se empleó el método de diagonalización en la obtención del teorema anterior. Si hacemos un arreglo matricial donde disponemos los naturales como las entradas verticales y las funciones parcialmente computables como las horizontales, entonces la entrada (N, m) indica el valor de la $N-$ésima función en el natural m, si este valor existe. Luego G se definió para que difiera de cada una de las funciones parcialmente computables, *al menos en el valor diagonal* (N, N).

Ilustración 3: Considere un sistema formal de deducción matemática $\mathcal{S}$, donde sea posible describir y demostrar propiedades de programas. Lo único que se exigirá de $\mathcal{S}$ es que el conjunto de todas las afirmaciones que se puedan hacer sea algorítmicamente enumerable, es decir, que exista un algoritmo que produzca una lista de todas las expresiones posibles. La razón de esta exigencia es satisfacer las condiciones propuestas por David Hilbert, quien estaba convencido de la existencia de un sistema de deducción con tales características para toda la Matemática.


K. Gödel, 1906 - 1978

Si suponemos que para cualquier programa N y natural m es posible demostrar en $\mathcal{S}$ la afirmación "N con entrada m se detiene" o su negación, entonces tendríamos una solución positiva al Problema de la Parada, ya que dados N y m, ejecutamos el algoritmo que genera todas las afirmaciones posibles en $\mathcal{S}$ hasta que aparezca la respuesta a la pregunta de si N al operar con m se detiene. Pero esto contradice el Teorema de Turing; excepto si $\mathcal{S}$ es inconsistente, es decir, si en $\mathcal{S}$ se puede demostrar cualquier cosa; lo cual hace de $\mathcal{S}$ un sistema de deducción inútil. Hemos obtenido así una versión simple del famoso Teorema de Incompletitud de Kurt Gödel como corolario del Teorema de Turing y, por tanto, como consecuencia indirecta de diagonalización[4]:

Teorema (K. Gödel): *Un sistema formal donde podamos al menos demostrar propiedades de la aritmética de los números naturales, no puede ser a la vez consistente y completo; es decir no puede estar libre de contradicciones y tener la capacidad de demostrar todas las afirmaciones válidas.*

En conclusión, el sueño de Hilbert de un único y poderoso sistema de axiomas y reglas de inferencia para toda la matemática es imposible de realizar.

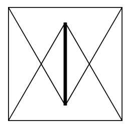
Argimiro Arratia

Dpto. Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid, España

[3]Puede consultar este tema en Wikipedia: en.wikipedia.org/wiki/Binary_numeral_system

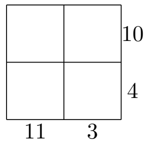
[4]Invito al lector a construir una demostración empleando explícitamente diagonalización; para ello intente reproducir parte del razonamiento de la Ilustración 2.

NOVIEMBRE 2008

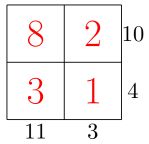
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3 Sofía y Andrés quedaron en verse en el cine a las 7:05 pm. Sofía cree que su reloj está 35 minutos adelantado pero en realidad está 15 minutos retrasado. Andrés cree que su reloj tiene 15 minutos de retraso pero en realidad está 10 minutos adelantado. ¿A qué hora llegan Sofía y Andrés al cine?	**4** Los puestos en un carrusel de niños se enumeran en secuencia $1, 2, 3, \ldots$ Luis se encontraba sentado en el puesto 11 de la misma, exactamente en un puesto opuesto a Claudia, quien se encontraba sentada en el puesto 4. ¿Cuántos puestos hay en el carrusel?	**5** 132 personas cruzan un río en un bote al mismo tiempo. 60 personas viajan en botes con capacidad 5 personas, 36 viajan en botes para 4 personas, y los demás viajan en botes para tres personas. ¿Cuántos botes deben ser usados si todos están llenos a su máxima capacidad?	**6** El pequeño Tomás tiene un cochinito para ahorrar dinero. Saca Bs. 6000 para comprar unas barajitas, pero la semana siguiente, su abuelo le regala Bs. 2000 por recoger el periódico en la tienda para él. Cuando Tomás mete el dinero en el cochinito, nota que hay Bs. 10000 en él. ¿Cuánto dinero había al principio?	**7** Hacen falta 712 kg de paja para alimentar cada día a 6 caballos y 40 vacas mientras que hacen falta 736 kg de paja para alimentar a 12 caballos y 37 vacas. ¿Cuánta paja será necesaria para alimentar 30 caballos y 90 vacas desde el 1 de enero al 31 de marzo, incluyéndolos, en un año no bisiesto?
10 En una fábrica, la máquina A produce 60 % de las piezas de la fábrica mientras que la máquina B produce el resto. 5 % de los productos de la máquina A son defectuosos y 2 % de los productos de la máquina B son defectuosos. ¿Qué porcentaje de productos producidos por la fábrica son defectuosos?	**11** Una mariposa tiene 5 círculos de colores en sus alas. El círculo amarillo es más pequeño que el verde pero más grande que el morado. El azul es más grande que el amarillo y verde pero más pequeño que el rojo. ¿Qué color se encuentra en el círculo de tercer tamaño?	**12** La figura muestra un cuadrado y dos triángulos equiláteros en su interior. Si el lado del cuadrado mide 1, ¿cuál es la longitud del segmento resaltado? 	**13** Se necesitan dos estudiantes para trabajar todos los días en la cafetería del colegio a la hora del almuerzo y hay cuatro estudiantes voluntarios para este trabajo. ¿Cuál es el mayor número de días en que pueden ser distribuidos de tal manera que ningún par de los cuatro estudiantes trabajen juntos más de una vez?	**14** Cuando Pedro cruzó la línea final de una carrera de 60 metros, le llevaba una ventaja de 10 metros a Ramón y una ventaja de 20 metros a Santiago. Si Ramón y Santiago continúan la carrera hasta la línea final sin cambiar sus velocidades, ¿por cuántos metros le ganará Ramón a Santiago?
17 Alejandro, Bárbara, Víctor, Paula y Michel se paran en un círculo. Alejandro y Bárbara no se paran uno al lado del otro, así como Bárbara y Víctor tampoco. Además, Víctor y Paula tampoco se encuentran uno al lado del otro. Entonces, ¿Quiénes se encuentran al lado de Michel?	**18** Un estudiante ganó Bs. 52000 en la tienda de su tío para comprar un celular nuevo. Sus tres hermanos le completaron lo que le hacía falta de la siguiente manera: El mayor le dio 50 % del valor total sin su parte, el segundo hermano le dio $33\frac{1}{3}$ % del valor total sin su parte y el otro hermano le dio 25 % del valor total sin incluir su parte. ¿Cuánto dinero le dio cada uno?	**19** En una fiesta de cumpleaños, los niños comieron 20 piezas de pastel entre todos. 2 niños comieron exactamente 3 pedazos cada uno, más de la mitad de los niños comieron exactamente dos pedazos y el resto de los niños comieron exactamente un pedazo. ¿Cuántos niños había en la fiesta?	**20** En un planeta lejano, criaturas de uno, dos o tres ojos están teniendo una reunión. Hay un total de seis cabezas y 14 ojos. Entre los seres de uno y tres ojos hay el doble de criaturas que de dos ojos. ¿Cuántas criaturas de tres ojos están presentes en la reunión? (Cada criatura tiene una cabeza)	**21** Los animales del bosque organizaron una carrera. Ellos corren por un camino circular y después de cada vuelta el último corredor sale de la carrera. ¿Cuántas vueltas corrió el canguro, que quedó en el puesto décimo entre 100 corredores?
24 Un comerciante adquirió un cierto número de artículos de los cuales vendió 70 y le quedaron más de la mitad. Al día siguiente, le devolvieron 6 pero vendió 36, después de lo cual le quedaron menos de 42. ¿Cuántos árticulos adquirió el comerciante?	**25** Una balanza de dos platillos está desequilibrada. Si se coloca un cambur en el platillo derecho, es necesario colocar 10 pesas de 10 gramos en el otro platillo para que la balanza se equilibre. Si se coloca el cambur en el platillo izquierdo, la balanza se equilibra colocando 4 pesas de 10 gramos en el otro platillo. ¿Cuál es el peso del cambur?	**26** Durante su vida Daniel ha vivido en distintas ciudades de Venezuela. La cuarta parte de su vida vivió en Caracas, la sexta parte en Barquisimeto, la mitad en Valencia y los últimos 6 años los ha vivido en Mérida. ¿Cuántos años tiene Daniel?	**27** Una evaluación de matemática consta de diez preguntas. Se dan 10 puntos por cada respuesta correcta y se quitan 3 puntos por cada respuesta incorrecta. Si Rodolfo respondió todas las preguntas y obtuvo un puntaje de 61 puntos en la evaluación, ¿Cuántas respuestas correctas tuvo Rodolfo?	**28** Aquiles compite en una carrera contra la tortuga que tiene una ventaja de 100 metros. Aquiles corre a 10 m/s mientras que la tortuga se mueve a 1 m/s. ¿Cuándo pasará Aquiles a la tortuga?

Kakuros

Se denomina Kakuro a un juego lógico-matemático, cercano al sudoku y al crucigrama tradicional. El objetivo, como en los crucigramas, es llenar algunas casillas vacías en un tablero, aunque como en el sudoku, estas casillas deben ser ocupadas por dígitos y en cada una de las claves todos los dígitos deben ser diferentes. Las pistas, por su parte, son las sumas de las casillas consecutivas que haya en la fila (o columna) según corresponda.

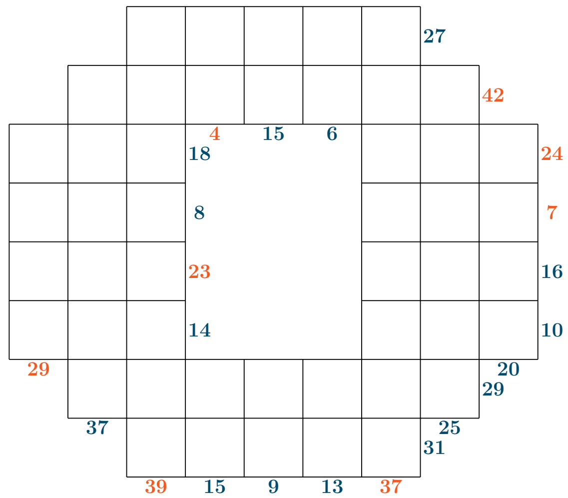


que tiene por solución



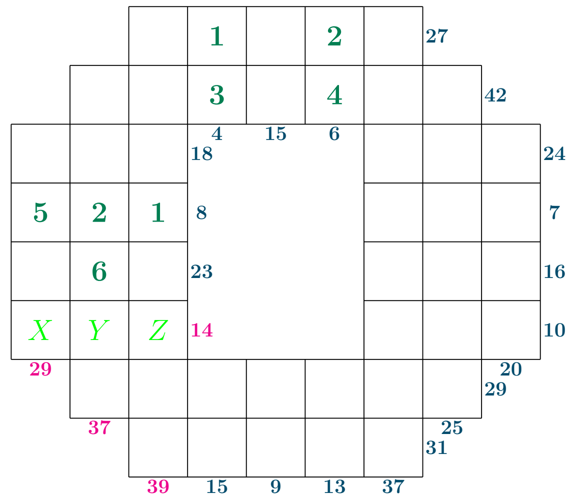
Como ejemplo, vemos a la izquierda un kakuro pequeño y su solución, esperando hacer visible la similitud con crucigramas y sudokus.
A continuacuón veremos un kakuro de mayor complejidad, para explicar dos de los pasos claves para resolver este tipo de acertijo.

Consideremos el kakuro que se muestra a la derecha, en el que se han resaltado algunas de las pistas en color naranja. La razón por la que se han resaltado es porque estas pistas son el primer paso en la solución de un kakuro.

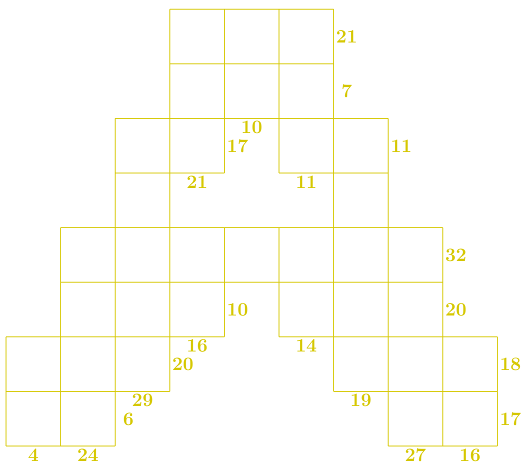


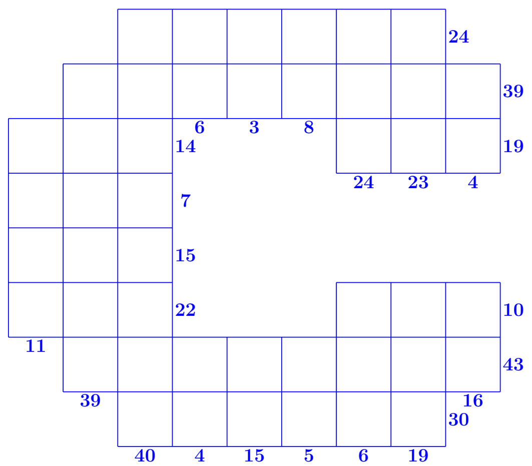
¿Qué tienen de particular estas pistas? Consideremos la pista 24 entre las pistas de la derecha. Esta pista corresponde a la suma de tres casillas, y sabemos por las condiciones para resolver kakuros que la máxima suma de tres casillas consecutivas de un kakuro es máximo $9+8+7=24$. Así, las tres casillas deben estar ocupadas, en algún orden, por los dígitos 9, 8, 7. Consideremos ahora las pistas 39 y 37 entre las pistas de la zona inferior del kakuro. Estas pistas corresponden a la suma de ocho casillas consecutivas, es decir, corresponden a la suma de todos los números entre 1 y 9 excepto uno de ellos. Como los números de 1 a 9 suman 45, la pista 39 indica que esas ocho casillas contienen todos los dígitos entre 1 y 9 excepto el 6, mientras la pista 37 indica que sus ocho casillas correspondientes contienen los dígitos del 1 al 9 excepto el 8. Como último ejemplo, analicemos lo que sucede con el 7 que se encuentra en las pistas de la derecha. Este número corresponde a la suma de tres casillas, que tiene como valor mínimo $1+2+3=6$, muy cercano a 7. De aquí se puede ver que la única forma de poder sumar 7 con tres dígitos diferentes es cuando estos dígitos son 1, 2 y 4 en algún orden. Continuando con este análisis, para dar una casilla a partir de esto, considérense las pistas 23, 29 y 39, todas en la zona izquierda del kakuro. Según lo analizado, la pista 39 indica que en esa columna no se encuentra un 6. Por su parte, tomando en cuenta que el máximo valor de la suma de cuatro dígitos diferentes es 30, podemos ver que la pista 29 indica que en su columna los dígitos son 9, 8, 7 y 5. Un análisis similar para la pista 23 indica que los números de su fila son 9, 8 y 6. Así, la fila de la pista 23 tiene necesariamente un 6, que no está en la columna de la pista 29 ni en la de la pista 39. Así, se puede determinar con total seguridad la ubicación del 6.

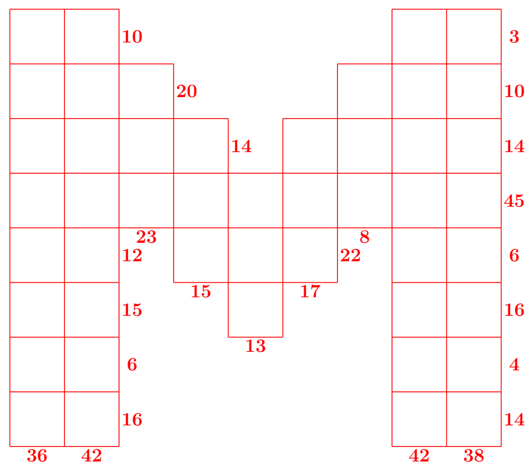
Vemos ahora con el desarrollo del kakuro unos pasos adelante. Consideremos las pistas 39, 37 y 29 y la pista 14 que tiene una casilla de intersección, aún no utilizada, con cada una de las anteriores (estas casillas están marcadas con las letras X, Y y Z). En la columna de la pista 39 el menor número que puede ubicarse en la casilla marcada con Z es 2. En la columna con la pista 37 ya se ubicaron los dígitos 2 y 6, por lo que quedan cuatro casillas para sumar 29, que como ya vimos solamente es posible con los dígitos 9, 8, 7 y 5, de donde el menor valor que puede tomar la casilla Y es 5. Por último, en la columna de la pista 29 los números deben ser 9, 8, 7 y 5 como se dijo anteriormente, pero ya el 5 se utilizó, por lo que el mínimo valor para la casilla X es 7. Como los valores mínimos posibles, 7, 5 y 2, suman exactamente lo que la pista requiere, deben ser exactamente esos los valores que se utilicen, por lo que la casilla marcada con X corresponde a un 7, la marcada con Y a un 5 y la marcada con Z a un 2.



Para cerrar, se dan tres kakuros más para el entretenimiento de los lectores,



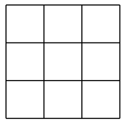




Oscar Bernal

Departamento de Matemáticas
Univ. de los Andes, Bogotá, Colombia

DICIEMBRE 2008

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 En un parque de diversiones, hay algunos niños haciendo fila para subir a los karts. Ellos calculan que si en cada kart se sienta un sólo niño, quedarán 4 niños sin subirse, mientras que si en cada kart se sientan dos niños, queda un carro vacío. ¿Cuántos niños están en la fila?	**2** ¿Cuántos rectángulos, que no sean cuadrados, hay en el diagrama? 	**3** Una persona pide que le cambien un billete de Bs. 10000 por billetes de Bs. 5000, Bs. 2000 ó Bs. 1000. ¿De cuántas formas se puede hacer esto? (La persona puede recibir billetes de una o más denominaciones, mientras estos sumen Bs. 10000).	**4** Una nave espacial envió una serie de números como sigue: $0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 4, 3, \ldots$ ¿Qué número va en la posición 50?	**5** Hay siete cartas en una caja con los siguientes números: 5, 84, 90, 613, 8, 75 y 605. ¿Cuál es el menor número de cartas que se deben sacar para asegurar que hay una múltiplo de 3?
8 ¿Cuántos diseños diferentes se pueden hacer si se acomodan en línea recta cinco pelotas blancas y tres negras, de tal manera que no están dos pelotas negras juntas?	**9** Dos grados de primaria presentaron el mismo examen. El curso que tenía 20 estudiantes, tuvo un promedio de 8, mientras que el otro curso, de 30 estudiantes, obtuvo un promedio de 7. ¿Cuál es el promedio para los estudiantes de ambos cursos?	**10** El área de cada una de las tres caras de una caja rectangular son 3, 6, y 8. unidades cuadradas. ¿Cuál es el volumen de la caja?	**11** Un reloj se adelanta 1 minuto cada 5 horas. Si a las 7 am. marca las 8 am., ¿Qué hora indicará cuando sean las 12m.?	**12** Hallar el menor número que se puede escribir como suma de 3, 4 y de 5 enteros positivos consecutivos.
15 Luis estaba jugando con los dígitos 2, 0, 0, 7. Mezclándolos, creó números. ¿Cuántos números escribió?	**16** Felipe coloca en un sombrero 5 bolas con los números del 1 al 5. Luego selecciona al azar dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea impar?	**17** *No hay certidumbre allí donde no es posible aplicar ninguna de las ciencias matemáticas ni ninguna de las basadas en las matemáticas.* **Leonardo Da Vinci**	**18** En un parque de diversiones, hay un tren que se forma colocando 3 vagones juntos. Hay 2 vagones azules, uno verde y dos amarillos. ¿Cuántas posibilidades hay para formar el tren si se debe tener por lo menos un vagón azul?	**19** Mauricio jugó al tiro al blanco 4 veces sin acertar en ninguna ocasión. En cada intento él apostó la mitad del dinero que tenía más Bs. 400. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente si al finalizar sólo tenía Bs. 1000?
22 ¿Cuántos números de 1 a 1000 tienen sus cifras en orden estrictamente creciente?	**23** (1, 1, 9) es una tripla de números naturales cuya suma es 11. (1, 9, 1) y (9, 1, 1) se consideran iguales aunque varía el orden de los números. ¿Cuántas otras triplas (diferentes) de números naturales tienen la suma igual a 11?	**24** Encuentre el número natural más pequeño tal que cuando se divide por 7 deja un resto de 3 (sobra 3) y cuando se divide por 5 deja un resto de 4 (sobra 4).	**25** *Dios hizo los números naturales; todos los demás son obra de los hombres.* **Kroneker**	**26** Halle el término de la expansión de $(x+y)^9$ que es múltiplo de x^6 pero no de x^7.
29 Juan y Luis decidieron ir al club de ajedrez y jugaron algunas partidas. Para su sorpresa, Juan ganó dos veces y empató 3. Luis ganó 3 veces y perdió 3 veces. ¿Cuántos partidos pudieron haber jugado juntos?	**30** Jaime vende cebollas en el mercado. Tiene una balanza de dos brazos y pesas de 1, 3 y 9 Kg. ¿Cuál es mayor número tal que él puede medir cualquier peso menor o igual que éste?	**31** En la floristería un ramo de 8 rosas y 6 lilas cuesta Bs. 7600. Otro ramo con 6 lilas y 3 rosas cuesta Bs. 5100. ¿Cuánto debe pagar Pedro por un ramo de 5 rosas y 5 lilas?		

SOLUCIONES ENERO-JUNIO

	ENERO
2	Adriana.
3	18 m.
4	37 cm^3.
7	380.
8	7cm^2.
9	166833.
10	75 %.
11	3 chicles.
14	4 metras.
16	24 maneras.
17	8 secuencias.
18	5 años.
21	$\frac{105}{512}$.
22	11 meses.
23	7 años.
24	20 globos.
25	4 números.
28	192 dígitos.
29	1305.
30	84 huevos.
31	5 números.

	FEBERERO
1	24 metras.
6	35 formas
7	6 combinaciones.
8	$x = \frac{5}{3}$.
11	10 gallinas.
12	60 m.
13	40.
14	18 estudianes.
15	40 y 48.
18	2002.
19	64 m.
20	125 periódicos.
21	118 m.
22	12 segundos.
25	30 días.
26	21 años.
27	1.
28	$\frac{693}{4} = 173{,}25$ Km.
29	2036.

	MARZO
3	1 día.
4	1.
5	14.
6	9 vasos.
7	200 gramos.
10	84 galletas.
11	59 nueces.
12	2 limones.
13	36 pelotas.
14	$A = 2011013$.
24	5.
25	15.
26	$x = \frac{1}{2}$
27	2.
28	3.
31	120

	ABRIL
1	$\frac{33}{66640}$.
2	12 años.
3	4 filas.
4	80 huevos.
7	10
8	$\angle BAF = 75°$.
9	14 cm.
10	5
11	11.
14	33,75 cm.
15	125 caramelos.
16	15.
17	Bs. 37520.
18	127 pies.
21	$\angle B = 60°$.
22	$\angle\alpha = 80^{circ}$.
23	2007 dígitos.
24	33330.
25	128 cm^2.
28	7 varones.
29	B.
30	5.

	MAYO
1	21 puntos.
2	6°.
5	37.5.
6	840 monedas.
7	72 maneras
8	24.
9	11.
12	14 cm.
13	Bs. 1800.
14	32.
15	12.
16	Bs. 300000.
19	24 cubos.
20	4 horas, 20 minutos.
21	3.
22	500 ceros.
23	1
26	46.
27	T=2.
28	13.
29	3330.
30	32 u^2.

	JUNIO
2	101 mm.
3	-72.
4	99
5	24.
6	$AN = 5$.
9	7 gallinas.
10	8 números.
11	4 revistas.
12	6 horas.
13	29.
16	2
17	3:8.
18	12.
19	$a^3 + b^3 = 432$.
20	36.
23	9 estudiantes.
24	60 cm.
25	10.28 metros
26	7 días.
27	22.
30	101.

SOLUCIONES JULIO-DICIEMBRE

	JULIO
1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$.
2	6
3	$\frac{1}{m}$.
4	5
7	75 hombres.
8	900.
9	4.
10	7521.
11	Bs. 1000.
14	10 lados.
15	20.
16	13.
17	9 números.
18	5 ternas.
21	43.
22	40 veces.
23	55.
24	Bs. 240000.
25	Martes.
28	$BD = 5\sqrt{3} + 5$
29	8.
30	6 posibilidades.
31	12 triángulos.

	AGOSTO
1	36 fósforos
4	720.
5	315.
6	21.
7	15.
8	1.
11	20.
12	$\frac{11}{36}$.
13	72 invitados
14	$A + B = 16$.
15	10
18	9:30 am.
19	ancho=alto=3cm y largo=6cm.
20	Bs. 800.
21	2.
22	Piso 2.
25	$BC = c - a$.
26	9.
27	3.
28	$k = 85$.
29	$g(x) = \frac{4x}{2-3x}$

	SEPTIEMBRE
1	20.
2	210.
3	Miércoles.
4	169 metras.
5	18.
8	4
9	$x = 1 - \frac{1}{y}$.
10	1 hora y 21 minutos.
11	27 estudiantes.
12	8 años.
15	10.
16	$A = 8$.
17	17.
18	15 cm.
19	Primero de febrero.
22	$\frac{\sin 1^\circ}{\cos 89^\circ} = 1$
23	$\frac{1}{6}$.
24	25 personas.
25	$(1+i)^8 = 16$.
26	6 veces.
29	8 camellos.
30	720.

	OCTUBRE
1	160.
2	5 años.
3	50 kilómetros.
6	945.
7	24 animales.
8	50 gramos.
9	Bs. 4230.
10	16 triángulos.
13	40320.
14	17 goles.
15	64°.
16	156.
17	27.
20	40
21	16 pedazos.
22	12.
23	19 combinaciones.
24	$\frac{4}{5}$.
27	32
28	108 cm.
29	1:50 pm.
30	4 días.
31	16.

	NOVIEMBRE
3	Sofía 7:55, Andrés 6:40 pm.
4	14 puestos.
5	33 botes.
6	Bs. 14000
7	162000 Kg.
10	3,8 %.
11	Verde.
12	$\sqrt{3} - 1$.
13	6 días.
14	12 metros.
17	Bárbara y Víctor.
18	60000, 48000 y 80000 bolívares.
19	10 niños.
20	3 criaturas.
21	91 vueltas.
24	141 artículos.
25	70 gramos.
26	72 años.
27	7.
28	$\frac{100}{9}$seg.

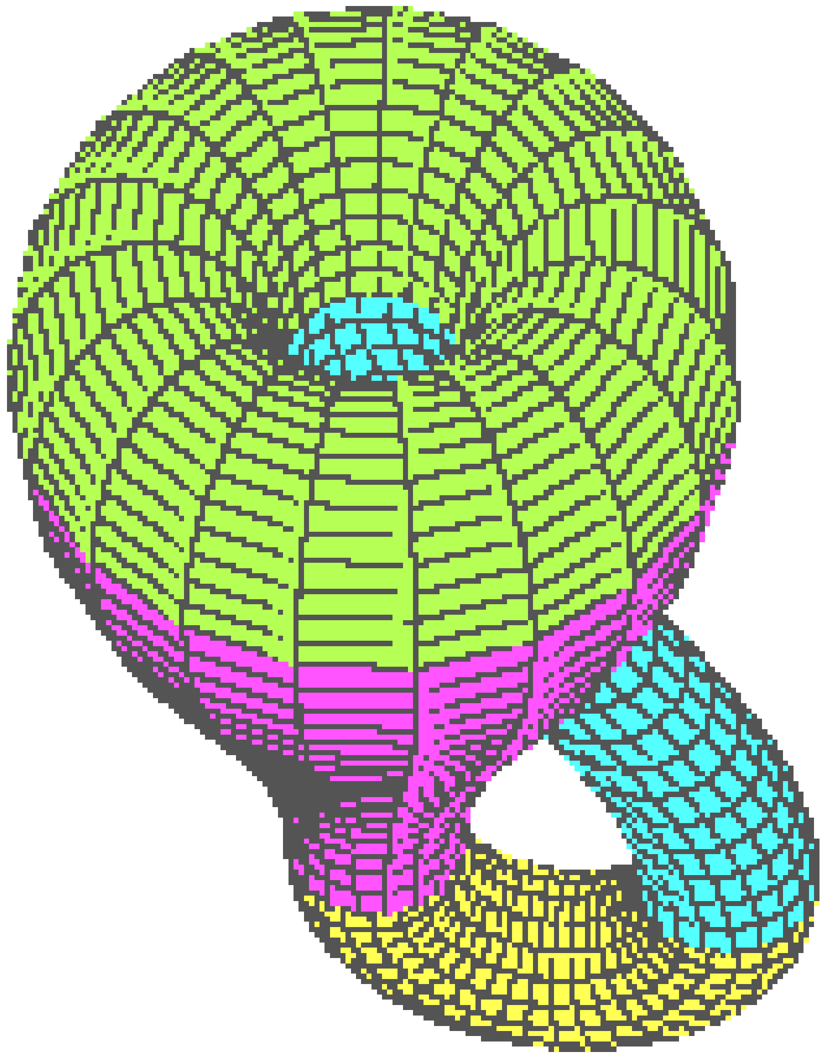
	DICIEMBRE
1	10 niños.
2	22 rectángulos.
3	10 maneras.
4	5.
5	5 cartas.
8	20.
9	7.4
10	12 u^3.
11	1:01 pm.
12	30.
15	12 números.
16	$\frac{3}{5}$.
18	15 posibilidades.
19	Bs. 28000.
22	129.
23	8 triplas.
24	24.
26	$84x^6y^3$.
29	2 partidos.
30	13 kg.
31	Bs. 5500.

Soluciones Kakuros Diciembre

			9	8	4			
			4	2	1			
		9	8		6	5		
		7				7		
	8	4	9	2	5	1	3	
	2	1	7		9	4	7	
3	9	8				2	9	7
1	5						8	9

		4	2	1	3	8	6	
	7	3	4	2	5	9	8	1
3	9	2				7	9	3
2	4	1						
1	6	8						
5	8	9				1	2	7
	5	6	1	7	4	3	8	9
		7	3	8	1	2	9	

6	4						2	1
5	6	9				1	5	4
2	1	8	3		1	2	6	5
3	2	6	4	1	7	5	9	8
4	8		8	5	9		4	2
8	7			7			7	9
1	5						1	3
7	9						8	6



Con el patrocinio de

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331.
Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela
Telefax: 212 605 1512.
e-mail: asomatemat8@gmail.com
Página Web: http://www.acm.org.ve

Coordinador General:
Rafael Sánchez Lamoneda
Recopilación y Soluciones:
Laura Vielma
Revisión Académica:
Oscar Bernal
Edición y Diseño:
Laura Vielma y Oscar Bernal
Colaboradores:
Argimiro Arratia
Diomedes Bárcenas
Alejandra Cabaña
Darío Durán
Mike Malatesta
Henry Martínez L.
Yamilet Quintana
Neptalí Romero