Calendario Matemático 2021

Asociación de
Competencias Matemáticas

Presentación del Calendario Matemático 2021

Este *Calendario Matemático 2021* va dirigido especialmente a los estudiantes que participan en la Olimpiada Juvenil de Matemática (OJM), desde quinto grado de primaria hasta quinto año de enseñanza media, así como a sus maestros, profesores, padres y representantes, aunque creemos que cualquier persona puede encontrar aquí algo interesante.

Para cada día del año (exceptuados sábados, domingos y feriados) se propone un problema o se recuerda a algún matemático notable nacido en ese día. Además, retomando la tradición de los calendarios publicados hasta el año 2014, hemos incluido doce artículos breves sobre aspectos interesantes de la matemática, escritos por destacados matemáticos, científicos y educadores, algunos de ellos ex-olímpicos.

Cada problema tiene una indicación del nivel al cual va dirigido: A si es para todos, B si es para media general y C si es para los alumnos de 4° y 5° años. El grado de dificultad varía bastante. Los problemas tipo A en general son sencillos y de carácter recreativo, como los problemas iniciales de una prueba Canguro. Los problemas tipo B son un poco más difíciles. Entre los problemas tipo C hay algunos bastante difíciles, aunque también los hay fáciles. Algunos problemas se refieren a realidades cotidianas mientras que otros son más formales y están relacionados con algún tópico matemático importante, pero siempre hemos procurado que resulten interesantes y se salgan de la rutina. Nuestra intención es que cualquier estudiante pueda encontrar algunos problemas adecuados a su nivel que logren entusiasmarlo.

Hemos aprovechado algunas casillas vacías del calendario para recordar algunos hechos matemáticos y definiciones importantes, especialmente aquellos que es necesario tener presentes para resolver los problemas propuestos en el mes.

En la sección *Soluciones y Comentarios* se incluyen soluciones bastante detalladas para todos los problemas, así como notas biográficas sobre los matemáticos presentados en el calendario.

El calendario puede ser usado de diversas maneras. Por ejemplo se puede colocar una copia de los problemas de cada mes en la cartelera del salón de clases y tratar de resolver uno cada día, si es adecuado al nivel del curso. Pero también puede ser utilizado como material de entrenamiento para las pruebas Canguro, alternándolo con la resolución de pruebas de años anteriores.

Este calendario y otros anteriores se pueden encontrar en el sitio web de la Asociación de Competencias Matemáticas, `www.acmven.org`

José H. Nieto

Coordinador Académico de la OJM

Enero 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	. Un número natural es **capicúa** si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.	. Por ejemplo 4, 77, 202, 3553 y 86168 son capicúas.	. A los capicúas también se les llama **palíndromos**.	**1.** **Año Nuevo**
4.  n. Isaac Newton (1643)	**5.** B El producto de tres números naturales consecutivos es igual a 280 veces su suma. ¿Cuáles son esos números?	**6.** A Con 300 cubitos de madera de 1 cm de lado se construyen dos cubos más grandes, no necesariamente iguales, usando el mayor número posible de cubitos. ¿Cuántos cubitos quedan sin utilizar?	**7.** A Cada lado de un triángulo mide un número entero de centímetros. Si el triángulo no es isósceles y su perímetro mide 11 cm, ¿cuáles son las medidas de sus lados?	**8.** A ¿Cuántos discos de 1 cm de radio caben dentro de una circunferencia de 3 cm de radio, sin que se superpongan?
11. A Halle todos los enteros capicúas de 4 dígitos que sean divisibles entre 15.	**12.** A Si los números capicúas se escriben en orden creciente $1, 2, 3, \ldots, 9, 11, 22, \ldots, 99, 101, 111, 121, \ldots$ ¿cuál ocupa el lugar 100?	**13.** A ¿Cuál es el menor cuadrado perfecto mayor que 9 que es capicúa?	**14.** B ¿Cuál es el mayor capicúa primo de 3 dígitos?	**15.** B Sean $A = 11111111111111$ y $B = 2222222$. Halle $\sqrt{A-B}$.
18. A Descomponga 2021 como producto de factores primos.	**19.** A ¿Cuál es el primer entero mayor que 2021 cuyos dígitos suman 21?	**20.** A ¿Qué número es mayor, $\frac{2020}{2021}$ o $\frac{2021}{2022}$?	**21.** B ¿Cuál es el menor número entero positivo cuyos dígitos suman 2021?	**22.** B Sea N la respuesta al problema de ayer. Halle el mayor factor primo de $N+1$.
25. B ¿Cuál es el dígito de las unidades de 2^{2021}?	**26.** B ¿Hay algún número primo capicúa de 4 dígitos?	**27.** A Halle todos los enteros positivos de la forma $a83b$ que sean divisibles entre 36.	**28.** A ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $$\frac{2021^2-1}{2022}$$	**29.** A Un artículo se vende con el 25 % de descuento en 21\$. ¿Cuál era el precio original?

Particiones de los enteros positivos y sumas

La combinatoria de los conjuntos infinitos es, en cierta forma, una novedad matemática, ya que comenzó su desarrollo en el siglo veinte. En esta nota presentaremos algunos resultados sobre la combinatoria del conjunto de los números naturales que se relacionan con propiedades de la suma.

Teorema 1. *(Schur) Para toda partición del conjunto* $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ *de los números enteros positivos en un número finito de partes, una de las partes contiene tres números* k, n, m *tales que*

$$k = m + n.$$

Schur demostró este teorema en 1916 mientras trabajaba en problemas relacionados con el último teorema de Fermat, estudiando ecuaciones del tipo $x^m + y^m = z^m$. Una demostración de este teorema de Schur, basada en un famoso teorema debido a F. P. Ramsey, se puede leer en la edición correspondiente al año 2010 de este Calendario (disponible en www.acmven.org).
Issai Schur (1875–1941) nació en una provincia del imperio ruso (hoy Bielorusia). Desarrolló una brillante carrera académica en la Universidad de Berlín. Su trabajo en la teoría de representaciones de grupos es muy importante, también trabajó en teoría de números, ecuaciones algebraicas, y teoría de funciones. Su vida tuvo un final trágico. A partir de 1933 comenzó a sufrir las consecuencias de la persecución nazi. Bajo presión renunció a su cargo en la Academia Prusiana y luego tuvo que abandonar su cargo en la universidad. A la edad de 63 años, tuvo que abandonar su país y emigró a Palestina emocionalmente destrozado. Murió dos años después.
El teorema de Schur ha sido generalizado de varias maneras. Por ejemplo, el enunciado siguiente fue demostrado por varios matemáticos independientemente:
Si el conjunto $\mathbb{N}^*$ de los números enteros positivos se parte en k subconjuntos diferentes, $N_1, N_2, \dots, N_k$, entonces, para cada entro positivo m, existe un conjunto A de enteros positivos y un índice i, $1 \leq i \leq k$, tales que A tiene m elementos y toda suma sin repeticiones de elementos de A pertenece a N_i. Dicho de otra manera, la suma de los elementos de cualquier subconjunto de A pertenece a N_i.
Se puede demostrar algo todavía más fuerte, por ejemplo el teorema de Neil Hindman, de 1974, que enunciamos a continuación.

Teorema 2. *(Hindman) Si el conjunto de los enteros positivos se parte en una cantidad finita de subconjuntos, digamos* $N_1, N_2, \dots, N_k$, *entonces existe un conjunto infinito* A *de enteros positivos y un índice* i *tal que la suma de los elementos de cada subconjunto finito no vacío de* A *pertenece a* N_i

Hindman es profesor de la Universidad Howard en los Estados Unidos. Ha hecho una serie de interesantes trabajos en varias áreas de las matemáticas, principalmente en la teoría combinatoria de conjuntos infinitos y la topología, y continúa activamente con sus labores de investigación.

La demostración del teorema de Hindman está fuera del alcance de esta breve nota, pero se puede encontrar en libros como los mencionados abajo en las referencias bibliográficas. Hay un teorema equivalente al teorema de Hindman que se expresa en términos de uniones de conjuntos finitos en vez de sumas de conjuntos finitos de enteros positivos. Para dar el enunciado, llamemos, como es usual, $\mathbb{N}$ al conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ de los enteros no negativos, y llamemos F al conjunto de todos los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathbb{N}$.

Teorema 3. *Si se parte el conjunto* F *en una cantidad finita de subconjuntos, digamos* $F_1, F_2, \dots, F_k$, *entonces existe una colección infinita* $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ *de elementos de* F *disjuntos dos a dos, y un índice* i, *tales que todas las uniones finitas de elementos de* S *pertenecen a* F_i.

A continuación indicaremos cómo demostrar que este teorema es equivalente al teorema de Hindman.
Consideremos la siguiente función $h : F \to \mathbb{N}^*$ que a cada conjunto finito a de números naturales le asigna el número $\sum_{i \in a} 2^i$, por ejemplo, $h(\{1, 3\}) = 2 + 2^3 = 10$. Obsérvese que si a y b son disjuntos, entonces $h(a \cup b) = h(a) + h(b)$.
Veamos que el teorema 3 implica el teorema de Hindman.
Supongamos que $N_1, N_2, \dots, N_k$ es una partición de $\mathbb{N}^*$. Definamos una partición de F del modo siguiente. Para cada conjunto finito de números naturales a, ponemos $a \in F_i$ si $h(a) \in N_i$. Por el teorema 3, existe una colección $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ de elementos de F disjuntos dos a dos tales que todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{A}$ pertenecen a F_i. Entonces el conjunto de enteros positivos $H = \{h(a_1), h(a_2), h(a_3$ es infinito y todas las sumas finitas de elementos de H (sin repeticiones) pertenecen a N_i.
Dejamos como reto para los lectores demostrar que el teorema de Hindman implica el teorema 3.

Referencias

[1] Di Prisco, C. A.; Combinatoria. Un panorama de la teoría de Ramsey. Editorial Equinoccio, 2009.

[2] Graham, R.L.; Rothschild, B.L. y Spencer, J. H.; Ramsey Theory. Wiley, 1990.

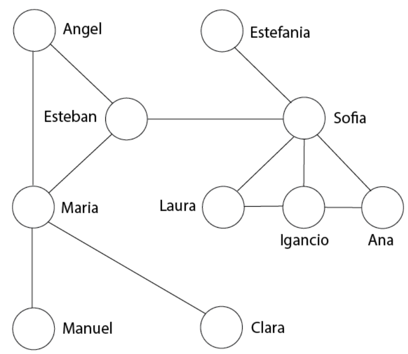
Carlos Augusto Di Prisco
Universidad de Los Andes, Bogotá

FEBRERO 2021

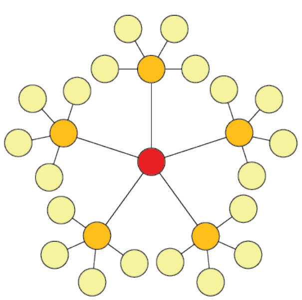
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	. Un número entero a es un **divisor** de otro entero b si existe un entero c tal que $ac = b$.	. Si a es un divisor de b se dice también que a **divide** a b y se escribe $a \mid b$.	. Si a es un divisor de b se dice también que b es un **múltiplo** de a.	. Un entero $p > 1$ es **primo** si sus únicos divisores positivos son 1 y p.
1. Escriba todos los divisores positivos de 12. A	**2.** Escriba todos los divisores (positivos y negativos) de 6. B	**3.** El número 1, ¿es primo? A	**4.** Escriba todos los múltiplos de 0. A	**5.** ¿Qué números enteros son divisores de 0? A
8. Un número entero es **par** si es múltiplo de 2. El número 0, ¿es par? A	**9.** Un número entero es **impar** si no es par. El número 0, ¿es impar? A	**10.** Pruebe que si $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces $a \mid c$. B	**11.** Pruebe que si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid b+c$ y $a \mid b-c$. B	**12.** a y b son enteros positivos, $a \mid b$ y $a \mid b+3$. ¿Qué valores puede tener a? B
15. **Carnaval**	**16.** **Carnaval**	**17.** Escriba todos los números primos menores que 100. A	**18.** ¿Existe algún número primo par? A	**19.** Si p y $p+35$ son ambos números primos, ¿cuál es el valor de p? A
22.  n. Frank P. Ramsey (1903)	**23.** Si $n^2 - 25$ es primo, ¿cuál es el valor de n? B	**24.** Si p, q y $p^2 - q^2$ son números primos, qué valores tienen p y q? B	**25.** ¿Cuántos números primos de dos dígitos tienen la propiedad de que, al invertir el orden de sus dígitos, se obtiene nuevamente un número primo? A	**26.** Halle un número primo de dos dígitos tal que el producto de sus dígitos sea 24. A

Grafos en las redes sociales

Los grafos son una de las estructuras matemáticas más útiles en otras áreas, tanto científicas como sociales. Nos ayudan a visualizar una inmensa cantidad de situaciones en una manera más intuitiva. Podemos crear un grafo que representa a las personas de un curso en una escuela. Creamos ún **vértice** para cada alumno del curso y los conectamos con una **arista** sólo si son amigos (Las amistades son mutuas!). En la figura puedes ver como María es amiga de Manuel porque hay una arista que los une mientras que Ángel no se lleva muy bien con Estefanía y por eso no hay una arista entre ellos. En este grafo también podemos ver que Sofía es la más popular ya que tiene la mayor cantidad de amigos: Sofía tiene 5 amigos (**grado** 5) mientras que los demás tienen menos.



¿Pero por qué sólo vamos a crear un grafo de un solo curso si podemos poner a todas las personas que queramos? Durante los últimos años los científicos han mostrado mucho interés en el estudio de las redes sociales. Las redes sociales no son más que un grafo como el que mostramos previamente pero con muchas más personas. Ahora, digamos que las 7 millardos de personas en el mundo pertenecen a una red social, **Mundo**.



Se cree que en el **Mundo** es posible conseguir un **camino** entre cualquier par de personas con menos de 6 pasos en donde cada paso es un amigo. Esto significa que tú estás a menos de 6 amistades de todas las personas del mundo! Pero, es esto posible? Digamos que todas las personas del mundo tienen x cantidad de amigos pero nadie tiene amigos repetidos. Si empezamos por ti, tu tienes x amigos y cada uno de ellos tiene x amigos, contándote a ti así que ahora tú estás conectado a x^2 personas en dos pasos o menos. Si continuamos así llegamos a que en 6 pasos estás conectado a cerca de x^6 personas. Para que esta cantidad llegue a ser la población mundial x debe ser al menos 44. Así que cada persona tiene que tener más de 43 amigos. Eso es posible, pero habíamos dicho que ninguno de los amigos coincide, lo cual no es tan creible porque es muy común que si tú eres amiga de Ana y Miguel entonces Ana y Miguel también son amigos.

Durante los años 1960 hubo un experimento relacionado con esto. El psicólogo, Stanley Milgram, de Harvard quería analizar que tan interconectadas estaban las personas en Estados Unidos. Primero eligió una persona A en Boston y luego envió a personas aleatorias una carta con el nombre de A y ciertas instrucciones. Estas personas debían estar lejos de A para que el experimento funcionara. Quien recibiera la carta debía reenviársela a alguien más. Si conocían a A debían enviársela directamente, de lo contrario debían enviársela a quien ellos creyeran estaba más cerca de A. No todas las cartas llegaron al destino especificado pero las que lo hicieron mostraron datos interesantes. Antes de llegar a A la mayoría de las cartas paso por sólo un par de personas. Esto quiere decir que estas eran personas muy bien conectadas ya que de distintos lugares estas cartas llegaron a ellos.

Personas con un grado mayor que el resto en el grafo son personas importantes en la red. Estas personas tienen la posibilidad de propagar algo, una enfermedad o una moda, más fácilmente porque tienen más amigos. También es más probable que éstos sean influenciados por la misma enfermedad o moda ya que hay más personas por la que les puede llegar. Pero, Â¿son éstas realmente las personas más influyentes en una red? Si entre un grupo de personas consideramos algunas de ellas especialmente importantes, digamos, personas famosas o los profesores de tu curso, ellos son los que definen las modas o las reglas y mientras más cerca estés de ellos más importante serás. Considera ahora qué pasa cuando deseas hacerle llegar un mensaje a otra persona a través de tus amistades. Quieres que le llege en la menor cantidad de pasos posibles. Hay personas que están conectadas de tal manera que la mayoría de estos trayectos pasan a través de ellos así que obtienen una gran cantidad de información en situaciones como éstas.

Todas estas diferentes definiciones de centralidad y conceptos de grafos en general son utilizados a menudo en sitios en donde no lo esperamos. Organizaciones de salud pública están interesadas en tener un modelo de las redes para detener epidemias evitando que personas centrales sean contagiadas. Compañías publicitarias hacen todo lo contrario. Estudian las redes sociales consiguiendo las personas con más influencia para hacer llegar su mensaje a la mayor cantidad de gente posible. El internet es otra red que es estudiada minuciosamente. Cuando buscas páginas web y obtienes una lista, éstas están organizadas de manera que las más relevantes estén más arriba. Uno de los factores que es considerado durante este proceso es qué tan central está es en la red. Puedes investigar quiénes son las personas más centrales en tu red e intentar el mismo experimento que Milgram para analizar qué tan conectados están realmente.

Carmela Acevedo
Universidad de Konstanz, Alemania

MARZO 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1. A ¿Cuál es el triple de la quinta parte de 555?	**2.** A Halle un número tal que el triple de su quinta parte sea 123.	**3.** A ¿Existe algún número que sea igual al doble de sí mismo?	**4.** A Halle un número que sea igual al triple de sí mismo menos 88.	**5.** A Halle un número que aumentado en 28 sea igual a siete tercios de sí mismo.
8. B Halle la edad de Ana sabiendo que es un tercio de la de Juan, pero dentro de 5 años solo será la mitad de la de Juan.	**9.** B Las edades de Ana y José suman 29. Si hace 5 años la edad de José era igual a la edad actual de Ana, ¿cuál es la edad de José?	**10.** A Hallar un número que sea igual a la tercera parte de la suma del número y 24.	**11.** A Juan tiene 87 canicas y Luis tiene 39. ¿Cuántas canicas debe darle Juan a Luis para que ambos queden con la misma cantidad de canicas?	**12.** A Juan tiene 97 canicas y Luis tiene 38. ¿Cuántas canicas debe darle Juan a Luis para que Luis tenga exactamente la mitad de canicas que Juan?
15. A ¿Cuántos números de cuatro dígitos hay, tales que la suma de los dígitos sea 4 y su producto sea 0?	**16.** A ¿Cuántos cuadrados de 2 cm de lado caben en un cuadrado de 8 cm de lado, sin que se superpongan?	**17.** A Andrés tiene 147 canicas y Luis tiene 57. ¿Cuántas canicas debe darle Andrés a Luis para que Luis tenga exactamente la mitad de canicas que Andrés?	**18.** A Halle un entero positivo de dos dígitos que sumen 14 y tal que si se intercambian sus dos dígitos resulta un número primo.	**19.** A Halle un entero positivo n de dos dígitos que sumen 11 y tal que n supere en 27 al número que resulta si se intercambian sus dos dígitos.
22. A Halle un entero positivo de dos dígitos tal que la suma de los dígitos sea 8 y el dígito de las unidades sea el triple del dígito de las decenas.	**23.**  n. E. Noether (1882–1935)	**24.** A Halle un entero positivo de dos dígitos con 4 como dígito de las unidades y tal que la suma de los dígitos sea un sexto del número mismo.	**25.** A Halle un entero positivo de dos dígitos tal que la suma de los dígitos sea 11 y tal que el dígito de las decenas supere en 4 al dígito de las unidades.	**26.** A Halle un entero positivo de dos dígitos que supere por 36 a la suma de los dígitos y tal que el dígito de las unidades sea el doble del dígito de las decenas.
29. A Un cubo de arista 3 cm se pinta de rojo. Luego se corta en cubitos de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos tienen exactamente dos caras pintadas de rojo?	**30.** A Un cubo de arista 4 cm se pinta de rojo. Luego se corta en cubitos de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos tienen exactamente una cara pintada de rojo?	**31.**  R. Descartes (1596–1650)	**.** Recuerda que el número de 2 dígitos $\overline{ab}$ es igual a $10a + b$.	**.** **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

Un modelo matemático de la propagación del coronavirus

El comportamiento del número de infectados en una epidemia se estudia a través de modelos matemáticos. Para entender estos modelos comencemos por explicar el comportamiento de $X(t)$, una cantidad que varía en función del tiempo. Se postula que su variación por unidad de tiempo $\triangle X/\triangle t = (X(t+\triangle t) - X(t))/\triangle t$, es proporcional al valor $X(t)$ que toma la función, es decir

$$\frac{\triangle X}{\triangle t} = kX(t).$$

Citemos algunos ejemplos: el capital sometido a una tasa de interés, el promedio del costo de la vida bajo tasas de inflación, la masa en desintegración de una partícula radioactiva, el número de elementos de una población, etc. El caso que nos interesa es el número de personas infectadas por el Covid-19. En general, cuando el crecimiento o decrecimiento de $X(t)$ no está modificado por factores externos, su comportamiento en función del tiempo se determina por medio de una ecuación diferencial cuya solución es la función exponencial. Si la constante de proporcionalidad k es positiva tendremos un crecimiento exponencial, en caso contrario un decrecimiento exponencial.

En el caso de la pandemia producida por el Covid-19 un modelo que conduce al crecimiento exponencial, al menos en los primeros momentos de la eclosión de la enfermedad, es el conocido por sus siglas SIR (Susceptibles, Infectados, Recuperados). Cada uno de estos compartimentos señala un subconjunto de la población afectada por la enfermedad. Este modelo es sólo una aproximación muy simplificada de los mecanismos por medio de los cuales se infectan las personas.

El número de elementos de la población y de los compartimentos en el tiempo t se denotan por $N(t)$, $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, respectivamente. Estas cantidades están relacionadas entre si por un conjunto de tres ecuaciones diferenciales que expresan la variación de cada una de ellas con respecto a las otras. En primer lugar se tiene que

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t),$$

lo que quiere decir que cualquier individuo de la población pertenece a uno y solo uno de los compartimentos en el tiempo en que se observa. Dos parámetros son importantes para describir el modelo: β la tasa de trasmisión y μ la tasa de recuperación. La variación por unidad de tiempo de los susceptibles, infectados y recuperados satisface las siguientes ecuaciones:

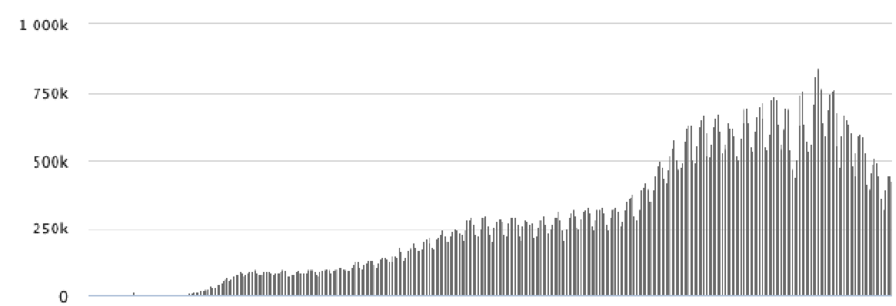
$$\begin{aligned} \Delta S/\Delta t &= -\beta SI, \\ \Delta I/\Delta t &= -\beta SI - \mu I, \\ \Delta R/\Delta t &= \mu I. \end{aligned}$$

Por simplicidad hemos puesto la variación de las cantidades con respecto a un intervalo de tiempo de longitud Δt. No obstante, en las ecuaciones este intervalo tiende a cero y la variación se convierte en la derivada con respecto al tiempo de la cantidad estudiada.

El sistema de ecuaciones es no lineal puesto que tanto en la primera como en la segunda ecuación aparece el producto de dos de las incógnitas, S por I. Esta situación conduce a que no se pueda construir una solución explícita de las ecuaciones. Por consiguiente, para resolverlas se debe recurrir a métodos aproximados de solución. Dos procedimientos de naturaleza diferente muestran la utilidad de tal modelo. En primer lugar si los parámetros β y μ son conocidos y se sabe el número inicial de infectados, se puede predecir el comportamiento de la pandemia y así verificar si las medidas que se toman van teniendo efecto y de qué manera. En segundo lugar, la observación del comportamiento de la enfermedad en una población y la aplicación de métodos estadísticos, permiten la estimación de los parámetros para su mejor adecuación. Ambos métodos han sido muy usados durante el año que ha pasado desde que estalló la epidemia.

Un elemento ligado a este tipo de modelo y del que se habla a menudo en estos días es el R_0, el número de reproducción, que es el número promedio de casos de contaminaciones que genera una persona infectada. Esta cantidad se define, en el modelo SIR, como $R_0 = \beta/\mu$. Entonces, para que la enfermedad se propague, este número debe ser estrictamente mayor que 1. Mientras más alejada de 1 sea esta cantidad, más rápido se propaga la enfermedad.

En conclusión: un modelo de propagación muy simplificado permite entender los conceptos de los que hablan, en esta hora de pandemia, todos los noticieros. Más importante aún, proporciona elementos para llevar adelante el monitoreo de su evolución.



Casos diarios de la COVID-19 en el mundo. Desde 22/01/2020 hasta 21/02/2021. Fuente www.worldmeters.info

José Rafael León

IMERL. Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.

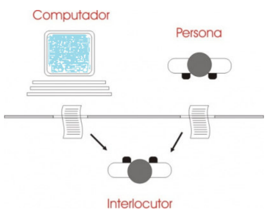
Escuela de Matemática. UCV. Caracas, Venezuela.

ABRIL 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	. Recuerda: **El 1 no es primo.**	. Recuerda: para ver que $n > 0$ es primo, basta comprobar que no es divisible entre ningún primo p con $p^2 \leq n$.	**1.** **Jueves Santo**	**2.** **Viernes Santo**
5. ¿Existen dos números primos que difieran en 1? A	**6.** La suma de dos números primos, ¿puede ser un número primo? A	**7.** ¿Qué número primo divide a *todos* los números capicúas de 4 dígitos? B	**8.** ¿Cuál es el menor número primo de tres dígitos? A	**9.** ¿Cuál es el mayor número primo de tres dígitos? A
12. De todos los números de tres dígitos cuya suma de dígitos es 9 se toman el mayor y el menor. ¿Cuál es su suma? A	**13.** De todos los números de tres dígitos cuya suma de dígitos es 15 se toman el mayor y el menor. ¿Cuál es su suma? A	**14.** De todos los números de 4 dígitos cuya suma de dígitos es 25 se toman el mayor y el menor. ¿Cuál es su suma? A	**15.**  n. L. Euler (1707–1783)	**16.** De todos los números de tres dígitos cuyo producto de dígitos es 144 se toman el mayor y el menor. ¿Cuál es su suma? A
19. ¿Cuál es el mayor cuadrado perfecto de cuatro dígitos? A	**20.** ¿Cuál es el menor cuadrado perfecto mayor que 5000? A	**21.** ¿Qué valores puede tener el dígito de las unidades del cuadrado de un número entero? A	**22.** ¿Será posible reordenar los dígitos del número 3278 y obtener un cuadrado perfecto? A	**23.** ¿Será posible reordenar los dígitos del número 1237 y obtener un cuadrado perfecto? A
26. Si el perímetro de un cuadrado es 24 cm, ¿cuál es su área? A	**27.** Si el área de un cuadrado es 49 cm^2, ¿cuál es su perímetro? A	**28.** Un cuadrado tiene 36 cm^2 de área. ¿Qué área tiene un cuadrado de lado doble que el lado del primero? A	**29.** Un triángulo cuya base mide 8 cm tiene igual área que un cuadrado de 6 cm de lado. Determine la altura del triángulo. A	**30.** Los lados de un rectángulo miden 9cm y 4cm. ¿Cuánto mide el perímetro de un cuadrado cuya área sea igual a la del rectángulo? A

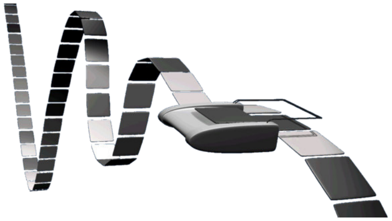
Alan M. Turing

¿Puede pensar una máquina?... ¿Te interesaría leer un artículo con ese nombre? Apuesto a que sí, realmente se trata de una propuesta altamente provocativa. Te comento pues que con ese título se tradujo al español uno de los más famosos artículos del matemático británico Alan Mathison Turing. Aunque originalmente se llamaba *Computing machinery and intelligence* –algo así como *Máquinas de computación e inteligencia*– lo del cambio del título proviene de que la primera línea del artículo plantea la susodicha pregunta y el autor se dispone a contestarla siguiendo un camino absolutamente inédito para el momento.

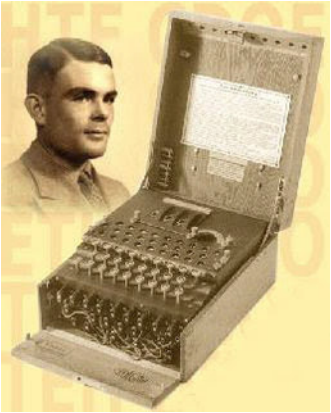


El matemático inglés propone jugar un juego con la máquina al que denomina *juego de imitación* y luego se llamaría *test de Turing*, consistente en colocar un tercer observador entre la máquina y un humano, los cuales deben responder las preguntas del tercero y este último deducir, de acuerdo a las respuestas, quién es quien en el juego. Después de la propuesta se dedica Turing a sortear una serie de posibles objeciones (entre las que se contaban las religiosas y las éticas). Por supuesto que el tema aun es polémico, pero lo interesante del asunto es que este artículo es uno de los antecedentes más importantes del estudio que hoy denominamos *inteligencia artificial*.

Pero no solo en este asunto fue pionero Turing. El matemático alemán David Hilbert inició el siglo XX planteando en el *Congreso Internacional de Matemáticos* en París, 23 problemas que –en su opinión– serían los más importantes a estudiar en ese siglo. En esa lista estaba uno que se conoció con el impronunciable nombre de *Entscheindungproblem*; aproximadamente, este problema propone conseguir un procedimiento algorítmico que permita resolver todos los problemas matemáticos de cierta clase. En términos muy generales un *algoritmo* es un conjunto de pasos orientados a resolver un problema, algo así como una receta de cocina matemática.



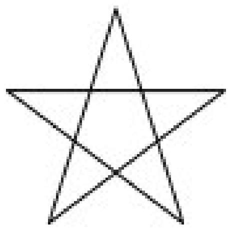
El problema fue contestado negativamente por Turing, mediante un concepto que luego recibió el nombre de *máquina de Turing*. A pesar de este nombre, no se trata de una máquina verdadera, sino de un instrumento teórico que consta de una cinta infinita en la que se pueden hacer y borrar marcas, mediante avances y retrocesos de la propia cinta. La máquina de Turing viene a ser una formalización precisa del concepto de algoritmo. Pero más sorprendente todavía: el concepto de máquina de Turing fue más importante para la construcción de las computadoras que los propios avances tecnológicos: las computadoras actuales no son otra cosa que segmentos de máquinas de Turing.



Turing fue un héroe de guerra en su país, pues descifró los códigos de la máquina *Enigma* mediante los cuales los nazis enviaban sus mensajes. A pesar de esto, fue sometido a un absurdo juicio que condujo a un aparente suicidio poco después de sus 40 años. El año pasado, la corona británica produjo una nota de desagravio a favor del científico, lo que parece ser una disculpa pública, similar a la de la Iglesia respecto a Galileo. En 2019 se filmó una película llamada *The imitation game*, en la que Benedict Cumberbatch representa al sabio inglés; el tema principal de la película es la máquina *Enigma*. Es una película recomendable a pesar de algunas inexactitudes históricas; pero el cine no está hecho para enseñar historia.

Douglas Jiménez
UNEXPO VR Barquisimeto, Venezuela

MAYO 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
3.	**4.** A ¿Cuántos números de tres dígitos tienen los tres dígitos diferentes?	**5.** A ¿Cuántos números de tres dígitos tienen dos dígitos iguales y el otro diferente?	**6.** A Halle todos los primos p y q tales que $p = 5q + 7$.	**7.** A ¿Cuál es el menor entero positivo cuyos dígitos suman 30?
10. B Calcule el valor de la suma $1-2+3-4+\cdots-2020+2021.$	**11.** A  ¿Cuántos triángulos hay en la figura?	**12.**  n. Maryam Mirzajani (1977–2017)	**13.** A Si se lanzan cuatro dados y se suman los puntos obtenidos, ¿cuántos valores diferentes se pueden obtener?	**14.** A María lanzó un dado 3 veces. Si en cada lanzamiento obtuvo un número diferente, y en total obtuvo 14 puntos, ¿cuáles son los tres números que obtuvo?
17. B Bruno es 8 años mayor que Ana y dentro de un año su edad será el doble de la de Ana. ¿Cuál es la edad de Ana?	**18.** B La edad de Bruno es el doble de la de Ana. Cuando Ana tenga la edad de Bruno, las edades de ambos sumarán 45 años. ¿Qué edad tiene cada uno?	**19.** A Si Julia agrupa sus caramelos de 4 en 4 obtiene 3 grupos más que cuando los agrupa de 5 en 5. ¿Cuántos caramelos tiene Julia?	**20.** A ¿Cuántos enteros positivos de tres dígitos tienen el primero par, el segundo impar y el tercero diferente de los dos primeros?	**21.** A ¿Cuántos enteros positivos de tres dígitos, si se leen de derecha a izquierda, son mayores que su valor normal?
24. B Calcule $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{49\cdot 50}.$	**25.** B Calcule $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{49\cdot 51}.$	**26.** B ¿Cuál es el último dígito de 3^{2021}?	**27.** A Para escribir los números del 1 al 333, ¿cuántos dígitos 3 se necesitan?	**28.** C ¿Cuál es el valor exacto de $\log_4 \sqrt[5]{64}$?
31. C ¿Cuál es el valor exacto de $\log_8 0,25$?	**.** Recuerda: **El 0 es múltiplo de cualquier otro entero.**	**.** Recuerda: **El único múltiplo del 0 es el 0.**	**.** Recuerda: **Todos los números enteros son múltiplo de1 1.**	**.** **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

Triangulaciones

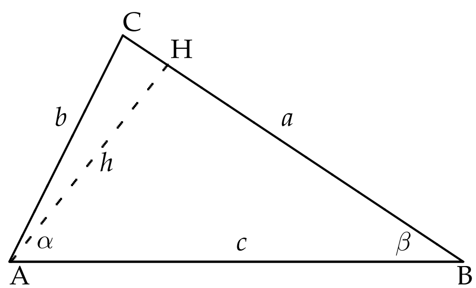
Medir distancias es una necesidad práctica tan antigua como el hombre mismo. Pero la cosa se complica cuando no es posible medir una distancia directamente, ya sea por su inmensa magnitud o bien porque entre un extremo y otro existen obstáculos infranqueables. Existe un procedimiento para solventar esas dificultades que se llama *triangulación*. Consiste en reducir el problema a la medición de ángulos y a la "resolución" de triángulos: (1) conocido un lado y los ángulos adyacentes, calcular uno o ambos lados restantes; (2) conocidos dos lados y el ángulo comprendido, calcular el tercer lado.

En topografía, navegación y muchas otras actividades se emplea el proverbial *teodolito*, tan propio al topógrafo como el estetoscopio es al médico. Es un pequeño aparato portátil provisto de un corto telescopio que permite medir ángulos horizontales y verticales cuyo vértice es el observador. Para distancias muy grandes, se miden los ángulos mediante señales satelitales; es el caso por ejemplo del GPS instalado en un vehículo y también en barcos, pero el proceso de triangulación es el mismo.

Veamos un caso típico: Se tienen dos puntos de observación A y B en la costa marítima, cada uno provisto de su teodolito, y se quiere determinar la distancia b del observador A a un barco C que se encuentra mar adentro.

Conocemos previamente la distancia rectilínea $c = AB$ entre los observadores. El teodolito en A mide el ángulo $\alpha = \angle CAB$; y el observador en B mide el ángulo $\beta = \angle CBA$. Debemos calcular la distancia $b = AC$. Tracemos una altura virtual AH de A al lado BC y sea $h = AH$.

En los triángulos rectángulos ABH y AHC de cateto común AH se tiene



$$h \;=\; b \operatorname{sen} \angle ACH \;=\; c \operatorname{sen} \beta$$

Ahora bien, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^0, se infiere que $\angle ACH = \angle ACB = 180^0 - (\alpha + \beta)$ y por tanto $\operatorname{sen} \angle ACH = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$. La expresión (omitiendo la h auxiliar) se convierte en

$$b \;\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \;=\; c \;\operatorname{sen} \beta \tag{1}$$

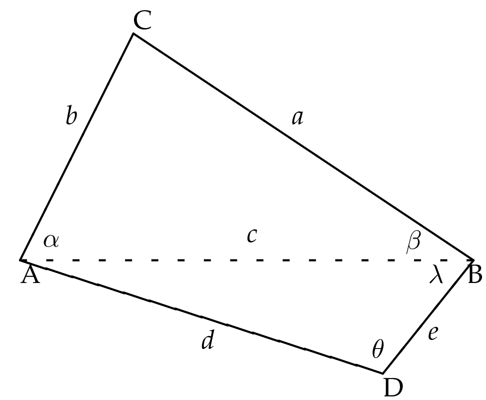
de donde

$$b \;=\; \frac{c \;\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \tag{2}$$

Y así calculamos la distancia b de A al barco C. Calcule el lector la distancia $a = BC$.

Con el mismo propósito de obtener $b = AC$, supongamos que entre los dos observadores A y B se interpone una montaña que los hace invisibles uno del otro, o sea que los ángulos α y β no pueden medirse directamente ni se conoce la distancia $c = AB$. Colocamos un tercer observador (con su teodolito) en un punto D detrás de la montaña, de modo que D pueda verse con A y con B, pero la montaña le tapa el barco C.

Las distancias $d = AD$ y $e = DB$ se conocen. Ahora A mide el ángulo $\varphi = \angle CAD$, D mide $\theta = \angle ADB$ y B mide $\psi = \angle DBC$. Para aplicar la fórmula (2) necesitamos calcular $c = AB$ y los ángulos α, β. En el triángulo $\triangle ADB$ empleamos la fórmula harto conocida



$$c^2 \;=\; d^2 + e^2 - 2de\cos\theta \tag{3}$$

y hemos calculado la distancia $c = AB$.

Sea $\lambda = \angle DBA$. La fórmula (1) puede aplicarse por analogía al triángulo $\triangle ADB$ y se tiene

$$c \;\operatorname{sen} \lambda \;=\; d \;\operatorname{sen} \theta$$

de donde

$$\lambda \;=\; \operatorname{arcsen}\left(\frac{d \;\operatorname{sen}\theta}{\mathrm{c}}\right) \tag{4}$$

(aunque es más práctico manejarse con $\operatorname{sen}\lambda$ para los cálculos).

Obtenemos entonces

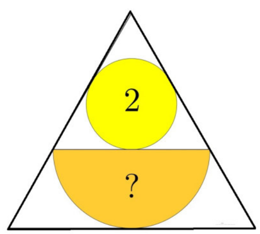
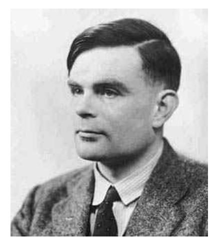
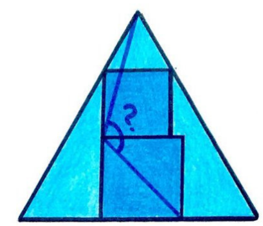
$$\beta \;=\; \psi - \lambda \qquad\qquad \alpha \;= \varphi - [180^0 - (\lambda + \theta)] \tag{5}$$

Ahora aplicamos la fórmula (2), hechos los cálculos en (3), (4) y (5), y el barco C está localizado. [Calcule el lector la distancia $a = BC$].

Ignacio L. Iribarren
Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales
Universidad Simón Bolívar

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas www.acmven.org

JUNIO 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	**1.** Si $a, k > 0$, pruebe que $\text{mcd}(ka, a) = a$. A	**2.** Si $a > b > 0$, pruebe que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a - b)$. A	**3.** ¿Cuál es el mcd de 1234567891 y 1234567893? A	**4.** Si $a, b, q, r > 0$ y $a = qb + r$, pruebe que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$. B
7. ¿Cuál es el mcd de 600000039 y 300000015? B	**8.** Halle el mcd de $10^99 + 2$ y $3 \cdot 10^100 + 63$. B	**9.** Halle el mcd de $2^{180} - 1$ y $2^{48} - 1$. B	**10.** Pruebe que $\text{mcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{mcd}(a,b)} - 1$. B	**11.** Si $2^x = 7$ y $49^y = 64$, ¿cuál es el valor del producto xy? B
14. Si $8^x = 25$ y $125^y = 4\sqrt{2}$, ¿cuál es el valor del producto xy? B	**15.** Los dígitos de un número entero son, en algún orden, 2, 2, 3, 3, 3, 7 y 8. ¿Puede de ese número ser un cuadrado perfecto? B	**16.** Los dígitos de un número entero son, en algún orden, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7. ¿Puede de ese número ser un cuadrado perfecto? B	**17.** Una recta corta a todos los lados de un polígono de 11 lados. Pruebe que necesariamente pasa por al menos uno de los vértices. B	**18.** Un cubo de arista 5 cm se pinta de azul. Luego se corta en cubitos de 1 cm de arista. ¿Cuántos cubitos tienen exactamente dos caras pintadas de azul? A
21.  n. Blaise Pascal	**22.** C 	**23.**  n. Alan Turing	**24.** Batalla de Carabobo 	**25.** C 
28. ¿Cuántos números de tres dígitos son divisibles entre 9, tienen el primer dígito impar y el segundo par? B	**29.** ¿Qué resto se obtiene si 2^{2021} se divide entre 7? B	**30.** Al sumar las longitudes de tres lados de un rectángulo se obtienen 20 cm o 22 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo? A	. **Recuerda:** $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $(a^n)^k = a^{nk}$	. **Recuerda:** $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b x$ $\log_b c \cdot \log_c x = \log_b x$

Trayectorias en Medios Dislocados

Un cristal es un medio elástico que puede exhibir pequeñas deformaciones. Los *fonones* son quasipartículas que determinan propiedades físicas del cristal como las conductividades térmicas y eléctricas. La trayectoria de un fonón puede ser una línea recta si el cristal no está deformado u otras curvas más interesantes si el cristal presenta distorsiones.

El universo es otro ejemplo de un medio elástico que está deformado por su propia masa. Los *fotones* son partículas elementales cuyas trayectorias también dependen de la geometría del medio donde viajan. Estos son los portadores de todas las formas de radiación electromagnética, como por ejemplo la luz o las ondas de radio.

En esta nota estudiamos la geometría que corresponde a un medio dislocado, es decir que presenta un tipo singular de deformación. Estas aparecen en imperfecciones de ciertos cristales o en las cuerdas cósmicas estudiadas en física teórica.

Considere un cono $\mathcal{C}$, como los vasos de papel o ciertos gorros de fiestas. Nuestro objetivo es explorar cual es la geometría que corresponde a un ser bidimensional que vive en este ambiente cónico.

Problema 1: Dado dos puntos $A, B \in \mathcal{C}$ construye una curva que los une con la menor longitud posible.

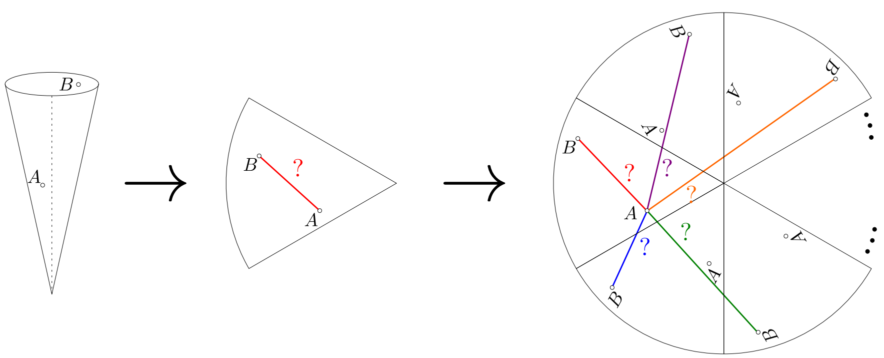


Figura 1:

Una forma conveniente de estudiar la geometría del cono es la que describimos a continuación y que aparece ilustrada en la Figura 1. Corte el cono a través de un rayo con origen en el vértice y extiéndalo de forma plana. Considere copias adicionales identificadas en los bordes de ser necesario. Este es un escenario más sencillo para resolver el problema anterior. Las curvas de mínima longitud en este caso son segmentos, sin embargo note que ahora existen múltiples segmentos entre A y B. En algunos casos, existe más de un segmento que une A y B con la menor longitud posible.

Problema 2: Dado $A \in \mathcal{C}$ distinto del vértice, encuentra todos los puntos $B \in \mathcal{C}$ para los cuales existen por lo menos dos segmentos distintos que unen A y B con la menor longitud posible.

Problema 3: Dado dos puntos $A, B \in \mathcal{C}$ distintos al vértice, demuestra que cualquier segmento que los une con la menor longitud posible no contiene el vértice.

Considere $A \in \mathcal{C}$ un punto distinto del vértice. La trayectoria de un fotón que parte de A corresponde a una línea recta en la construcción descrita en la Figura 1. Note que existen trayectorias que regresan al punto A.

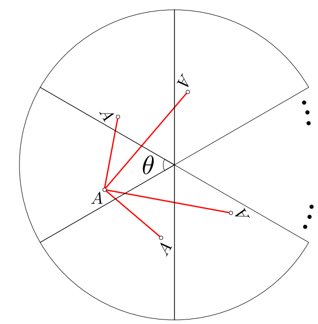


Figura 2:

Problema 4: ¿Cuántas trayectorias regresan al punto A?

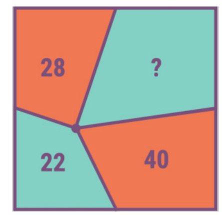
La respuesta depende del ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ que forma el cono una vez extendido. ¿Son todas las trayectorias en la Figura 2 distintas?

Para finalizar quisiéramos proponer problemas similares en el caso donde $\theta > 2\pi$. El análogo al tercer problema es quizás sorprendente dado que en este caso sí existen pares de puntos $A, B \in \mathcal{C}$ (distintos del vértice) para los cuales la curva más corta pasa por el vértice. Más aún, es posible construir estos puntos tales que la misma propiedad se cumple para pequeñas perturbaciones de ellos.

Conclusión: Un medio con singularidades, como el vértice del cono, nos lleva a considerar distintas geometrías con interesantes propiedades. La des-cripción de líneas y segmentos puede ser incluso abordada con herramientas de la geometría euclídea. Sin embargo, múltiples modelos singulares como el que acabamos de presentar están siendo estudiados hoy en día por físicos, matemáticos, ingenieros e incluso bioquímicos en problemas relacionados con el plegamientos de proteínas.

Héctor A. Chang Lara
CIMAT, Guanajuato, Mèxico

JULIO 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. Niveles: A: para todos, B: media general, C: 4° y 5° años.	. Recuerda: el $p\,\%$ de a es $\frac{pa}{100}$.	. Recuerda: a es el $\frac{100a}{b}\,\%$ de b.	**1.**  n. G. Leibniz	**2.** A Ana dice que Bea miente. Bea dice que Cleo miente. Cleo dice que Dora miente. Dora dice que Cleo miente. ¿Cuántas de ellas mienten?
5. Día de la Independencia 	**6.** A Si subo los escalones de una escalera de dos en dos, doy 27 pasos. ¿Cuántos pasos daría un gigante que los subiese de 9 en 9?	**7.** A Hoy es miércoles y dentro de 100 días es mi cumpleaños. ¿En qué día de la semana cumpliré años este año?	**8.** A 	**9.** A Uno de los ángulos de un triángulo isósceles mide $104°$. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos?
12. A ¿Qué número es mayor, $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$ o $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}$?	**13.** B ¿Qué número es mayor, $\sqrt{10}$ o $\frac{16}{5}$?	**14.** B ¿Qué número es mayor, 2^{30} o 3^{20}?	**15.** B ¿Qué número es mayor, $2+\sqrt{2}$ o $\sqrt{5+4\sqrt{2}}$?	**16.** B ¿Qué número es mayor, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ o $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$?
19. A ¿Cuánto es el 15 % de 80?	**20.** A ¿Qué valor es mayor, el 20 % de 40 o el 40 % de 20?	**21.** A En una clase hay 30 alumnos, de los cuales 12 son niñas. ¿Cuál es el porcentaje de varones en la clase?	**22.** A Un artículo cuesta \$ 40 pero se ofrece con un 15 % de descuento. ¿Cuánto hay que pagar por él?	**23.** A Un artículo cuesta \$ 20 pero tiene un recargo del 5 % por gastos de envío. ¿Cuánto hay que pagar por él?
26. B El 40 % de los alumnos de una clase son varones. Si en la clase hay 24 niñas, ¿cuántos varones hay?	**27.** A Un comerciante aumenta el precio de un artículo un 20 % y luego lo ofrece con un 20 % de descuento. ¿Cuál es mayor, el precio resultante o el original?	**28.** B Las niñas son el 60 % de una clase. Si su promedio es 17 y el de los varones es 14, ¿cuál es el promedio general de la clase?	**29.** B El promedio de las niñas en una clase es 17 y el de los varones es 14. Si el promedio general de la clase es 15,36, ¿cuál es el porcentaje de varones en la clase?	**30.** A En el mes de julio de cierto año hay exactamente 4 lunes y 4 viernes. ¿Qué día de la semana es el 18 de ese mes?

Centro de masas y geometría

Dados dos puntos A y B denotaremos $\overrightarrow{AB}$ al vector de origen A y extremo B, $\overline{AB}$ al segmento de extremos A y B, y AB a la longitud de ese segmento. Supondremos que el lector conoce la operación de suma de vectores y el producto de un escalar por un vector. Llamaremos *punto material* a un par ordenado (P, m) formado por un punto P y un número real positivo m, al cual denominaremos *masa* del punto. Este concepto es una representación abstracta de objetos físicos cuyas dimensiones son despreciables en comparación con las distancias entre ellos.
Dados puntos materiales (P_1, m_1), (P_2, m_2),..., (P_n, m_n), sea $m = m_1+m_2+\cdots+m_n$ (masa total del sistema de puntos). Sea O un punto cualquiera que tomamos como origen. Consideremos el punto G definido por

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m}\overrightarrow{OP_i}.$$

Es interesante comprobar que G no depende de la elección del punto O. En efecto, si O' es otro punto cualquiera, como $\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m} = 1$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m}\overrightarrow{O'P_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m}\left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}\right) = \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m}\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O'G}.$$

Definición Al punto material (G, m) se le llama *baricentro*, *centro de masas* o *centroide* del sistema de puntos (P_1, m_1), (P_2, m_2),..., (P_n, m_n).

Ejemplo 1. Dados dos puntos materialesa (A, m_1) y (B, m_2) tomemos $O = A$. Entonces

$$\overrightarrow{AG} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{AA} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{AB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{AB},$$

es decir que G se encuentra alineado con A y B y se cumple $AG = \frac{m_2}{m_1+m_2}AB$. Análogamente $BG = \frac{m_1}{m_1+m_2}BA$, de donde $\frac{AG}{GB} = \frac{m_2}{m_1}$. Es decir que las distancias de G a los puntos A y B son inversamente proporcionales a sus masas. En particular si $m_1 = m_2$ entonces G es el punto medio del segmento AB.

Teorema 1. Para calcular el baricentro de un conjunto de puntos materiales, se puede reemplazar cualquier subconjunto de puntos por su baricentro.

Prueba: Sea (G, m) el baricentro de los puntos materiales (P_1, m_1), (P_2, m_2),..., (P_n, m_n). Sea k un entero entre 1 y n y sea (H, m') el baricentro de (P_1, m_1), (P_2, m_2), ..., (P_k, m_k). Afirmamos que el baricentro del sistema (H, m'), (P_{k+1}, m_{k+1}), ..., (P_n, m_n) es el mismo (G, m) del sistema original. En efecto, $m' = m_1+m_2+\cdots+m_k$, $\overrightarrow{OH} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m'}\overrightarrow{OP_i}$ y $m = m' + m_{k+1} + m_{k+2} + \cdots + m_n$. Entonces

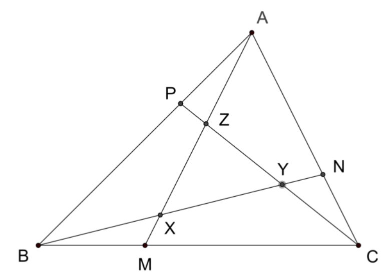
$$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m}\overrightarrow{OP_i} = \frac{m'}{m}\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m'}\overrightarrow{OP_i} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i}{m}\overrightarrow{OP_i} = \frac{m'}{m}\overrightarrow{OH} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i}{m}\overrightarrow{OP_i},$$

y esta última expresión es justamente la que caracteriza al baricentro del sistema (H, m'), (P_{k+1}, m_{k+1}),..., (P_n, m_n).

Ejemplo 2. El baricentro de tres puntos materiales $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ coincide con lo que se llama *baricentro del triángulo ABC* en geometría elemental, es decir el punto donde concurren las tres medianas del triángulo ABC.

Prueba: Como vimos en el Ejemplo 1, el baricentro de $(A, 1)$ y $(B, 1)$ es $(M, 2)$, siendo M el punto medio de $\overline{AB}$. Por el Teorema 1, el baricentro G de $(A, 1)$, $(B, 1)$ y $(C, 1)$ es el baricentro de $(M, 2)$ y $(C, 1)$, que se encuentra en la mediana $\overline{AB}$ y cumple $GA/GM = 2$. Análogamente se prueba que G está en las otras dos medianas y las divide en la misma proporción $2 : 1$.

Ejemplo 3. Sea ABC un triángulo. Sean M, N y P puntos en los lados BC, CA y AB, respectivamente, tales que $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \frac{1}{2}$. Sean X, Y, Z las intersecciones de AM, BN, CP con BN, CP, AM, respectivamente. Halle la proporción en que queda dividido el segmento $\overline{BN}$ por X e Y. Halle la razón entre las áreas de $\triangle XYZ$ y $\triangle ABC$.



Solución: El baricentro de $(B, 4)$ y $(C, 2)$ es $(M, 6)$ y el baricentro de $(C, 2)$ y $(A, 1)$ es $(N, 3)$. Luego el baricentro de $(A, 1)$, $(B, 4)$ y $(C, 2)$ es $(X, 7)$. Se sigue que $\frac{XB}{XN} = \frac{3}{4}$ y $\frac{XM}{XA} = \frac{1}{6}$. Como por simetría debe ser $\frac{YN}{YB} = \frac{XM}{XA} = \frac{1}{6}$, resulta que $\frac{YN}{BN} = \frac{1}{7}$. Además $\frac{XB}{BN} = \frac{3}{7}$ y en conclusión $BX : XY : YN = 3 : 3 : 1$. Ahora es fácil comparar las áreas:

$$[XYZ] = \frac{3}{7}[BNZ] = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}[BNA] = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}[ABC] = \frac{1}{7}[ABC].$$

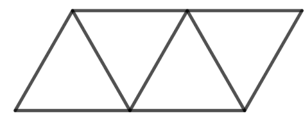
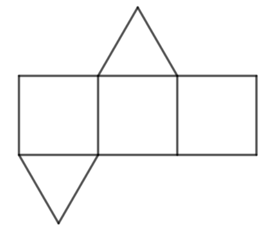
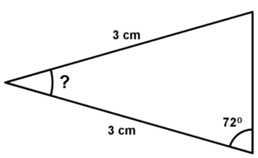
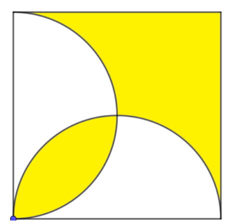
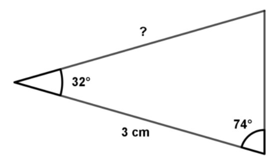
Para finalizar, un par de ejercicios que se resuelven con la técnica que hemos expuesto.

Ejercicio 1. Sea $ABCD$ un tetraedro. Pruebe que los tres segmentos que unen puntos medios de aristas opuestas y los tres segmentos que unen cada vértice al baricentro de la cara opuesta, concurren en un punto G. Halle la proporción en que G divide a cada uno de los segmentos.

Ejercicio 2. (Teorema de Ceva) Sea ABC un triángulo y M, N y P puntos en los lados BC, CA y AB, respectivamente, tales que $\frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CP}{PA} = 1$. Pruebe que los segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$ son concurrentes.

José H. Nieto S.
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela

Agosto 2021

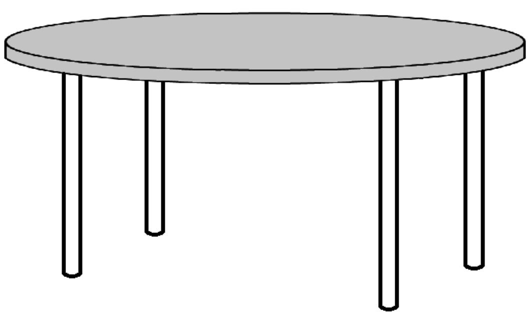
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
2. $2021 - 43 \times 47 = ?$ A	**3.** $2^{10} - 3^6 = ?$ B	**4.** Simplifique $\frac{594}{1386}$. A	**5.** $\sqrt[3]{8}^{\sqrt[4]{81}} = ?$ B	**6.** $\log_2 \sqrt[3]{32} = ?$ B
9. Halle todos los enteros positivos que divididos entre 5 dejan un resto igual al cociente. A	**10.** ¿Para qué valores de k las soluciones de $$x^2 - 20x + k = 0$$ son números primos? C	**11.** Un grifo llena un tanque de agua en 2 horas. Otro grifo lo llena en 3 horas. ¿En cuánto tiempo se llena el tanque con los dos grifos abiertos? B	**12.** B  ¿Qué poliedro se puede armar con esto?	**13.** B  ¿Qué poliedro se puede armar con esto?
16. A  Halle la medida del ángulo marcado con '?'.	**17.**  n. Pierre de Fermat	**18.** A  ¿Qué fracción del cuadrado es amarilla?	**19.** A  Halle la medida del lado marcado con '?'.	**20.** En la clase de Juan está el 25 % de los alumnos de primer año y el 10 % del total de alumnos del colegio. ¿Qué porcentaje de los alumnos del colegio están en primer año? B
23. Calcule el valor exacto de $$256^{\frac{3}{8}}.$$ B	**24.** Calcule el valor exacto de $$\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{3}{4}}.$$ B	**25.** Calcule el valor exacto de $$\left(\frac{1}{3125}\right)^{-\frac{2}{5}}.$$ B	**26.** Calcule el valor exacto de $$\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{49}{81}}.$$ B	**27.** ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un pentágono regular? B
30. ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un dodecágono regular? B	**31.** Halle la suma de todos los enteros positivos que divididos entre 50 dejan un resto igual al cociente. B	**.** Recuerda: $$a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$	**.** Recuerda: $\log_b a = c$ si y solo si $$b^c = a.$$	**.** **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

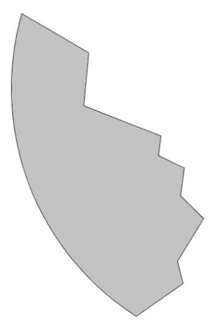
Problemas de la vida cotidiana con mediatrices

La *mediatriz* de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio. Una propiedad muy importante de la mediatriz de un segmento es que cada uno de sus puntos se encuentra a la misma distancia de los extremos del segmento. En un triángulo, las mediatrices de cada uno de sus lados concurren en un punto llamado **circuncentro**. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, es decir, la circunferencia que pasa por todos los vértices del triángulo. Una de las propiedades más importantes del circuncentro es que es el único punto, del plano que determina el triángulo, que se encuentra a la misma distancia de los vértices. Esta última propiedad, nos permite resolver problemas de equidistancia como el siguiente:

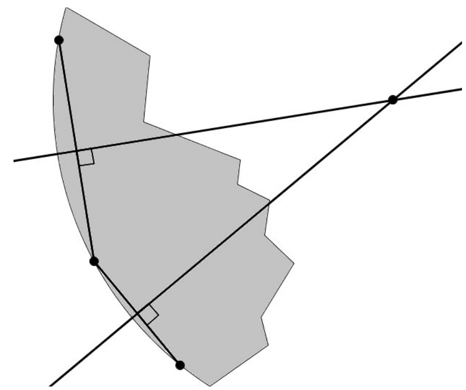
Supongamos que los gobernadores de tres ciudades, que no están alineadas, se proponen el proyecto de instalación de una antena repetidora para telefonía celular e internet que mejore la cobertura de estos servicios para todas las ciudades. Esto les permitirá ahorrar en costos ya que se dividirá entre tres el presupuesto que genera el proyecto. Por supuesto, esperan ubicar esta antena en un sitio que se encuentre a la misma distancia de las tres ciudades. ¿Cómo cree usted que los ingenieros encargados de la ejecución del proyecto encontrarán el sitio exacto para la instalación de la antena de acuerdo a la condición de equidistancia exigida por los gobernadores? ¡Exacto! ¡Deben ubicar el *circuncentro* del triángulo determinado por los “puntos"de ubicación de cada una de las tres ciudades! Para esto no hace falta trazar cada una de las tres metriatrices correspondientes a cada lado del triángulo. Solo trazamos dos de ellas y el punto de intersección será el circuncentro buscado, es decir, el punto donde se ubicará la antena repetidora.

Ahora nos plantearemos otra situación problemática que resolveremos con ayuda de las mediatrices... Supongamos que tenemos una mesa circular cuya parte superior es de vidrio ahumado y ésta se rompe en varios trozos. ¿Es posible que en una cristalería se pueda fabricar de nuevo la parte superior de la mesa con el mismo diámetro del vidrio original? La respuesta es afirmativa y una solución alternativa consiste en llevar a la cristalería uno de los trozos de vidrio que contenga buena parte del borde de la mesa.

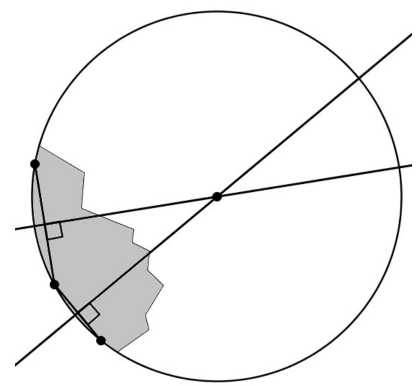




Pero, ¿qué pueden hacer en la cristalería para reproducir el vidrio roto? Podría trazarse la parte del borde de la mesa que tiene el trozo de vidrio (en el suelo o en una gran hoja de papel, por ejemplo) y marcar tres puntos en el mismo. Luego, se trazan dos segmentos que unan dos pares de esos puntos y, posteriormente, las mediatrices correspondientes a cada uno de esos segmentos. Estas mediatrices se cortarán en un punto. ¿Puede adivinar, amigo lector, en qué nos ayudará ese punto?



¡Ese punto es el *circuncentro* del triángulo determinado por los tres puntos que elegimos inicialmente! Esto significa que con ayuda del circuncentro y uno de los puntos del triángulo obtendremos el radio del círculo que estábamos buscando y se podrá fabricar el vidrio de nuestra mesa con el mismo diámetro original.



Henry Martínez L.
Facultad de Ingeniería – Universidad Católica Andrés Bello

Septiembre 2021

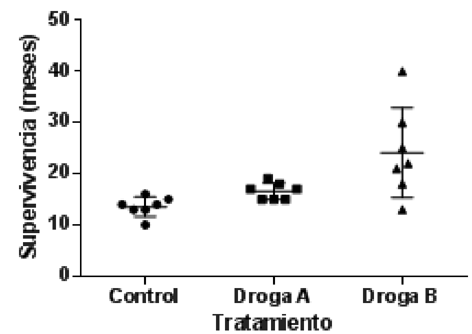
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	. Recuerda: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$	**1.** Evalúa B $1-(2-(3-(4-(5-6)))).$	**2.** Evalúa B $9(8-7(6-5(4-3(2-1)))).$	**3.** Evalúa B $2((3+4(8-9))-(1-5(4-7))).$
6. ¿Cuántos triángulos pueden formarse uniendo 3 vértices de un hexágono regular? A	**7.** Considere el centro y los 6 vértices de un hexágono regular. ¿Cuántos triángulos pueden formarse uniendo 3 de esos puntos? A	**8.**  n. Marin Mersenne	**9.** El número $2^{20}-1$, ¿es primo o compuesto? B	**10.** El número $2^{51}+1$, ¿es primo o compuesto? B
13. Pruebe que para n entero positivo a^n-1 es el producto de $a-1$ con $a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1.$ B	**14.** Pruebe que para n entero positivo impar a^n+1 es el producto de $a+1$ con $a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots-a+1.$ B	**15.** Si n es un entero positivo y 2^n-1 es primo, pruebe que n es primo. B	**16.** Si n es un entero positivo y 2^n+1 es primo, pruebe que n es una potencia de 2. B	**17.**  n. Bernhard Riemann
20. ¿Cuál es el mayor número par que se puede obtener borrando cuatro de los ocho digitos de 61397452? B	**21.** ¿Cuál es el menor número impar que se puede obtener borrando cuatro de los ocho digitos de 61397452? A	**22.** ¿Cuántos números de 5 dígitos se pueden escribir usando una vez cada uno de los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4? A	**23.** ¿Cuántos números $\overline{abcd}$ de cuatro dígitos hay tales que $a>b>c>d$? C	**24.** ¿Cuántos números $\overline{abcd}$ de cuatro dígitos hay tales que $a<b<c<d$? C
27. ¿Cuántos números $\overline{abc}$ de tres dígitos hay tales que $a>b<c$? C	**28.** ¿Cuántos números $\overline{abc}$ de tres dígitos hay tales que $a<b>c$? C	**29.** ¿Cuántos números $\overline{abc}$ de tres dígitos hay tales que $a\le b\le c$? C	**30.** ¿Cuántos números $\overline{abc}$ de tres dígitos hay tales que $a\ge b\ge c$? C	. Los primos de la forma 2^p-1 de llaman *primos de Mersenne*.

Los Números no Engañan, son las Personas

Creo que mis calificaciones como *nerd* son bien merecidas, dada mi afinidad por los chistes y dichos sobre la estadística. Ejemplos como “Un estadístico intentó cruzar un río de un metro de profundidad, en promedio, y se ahogó”, “¿Sabías que 87.166253 % de todos los estadísticos reportan un nivel de precisión en sus resultados que no se justifica?” y “Hay tres clases de mentiras: las mentiras, las malditas mentiras y las estadísticas” me dejan sin aliento y con lágrimas en los ojos. Este última frase se atribuye a Benjamin Disraeli, pero como no es seguro vamos a decir que es probable y ya. Lo importante es que alguien lo dijo. Mi reacción a la estadística es común: entre las muchas teorías del humor, el miedo y la ignorancia tienen puestos prominentes. Hablo como biólogo promedio, dispuesto a considerar promedios, desviaciones estándares y la prueba *t* de Student al momento de analizar mis datos, entregándome a las manos no-paramétricas de Mann y Whitney solo cuando tengo indicaciones innegables de la no-normalidad de mis datos, como la desviación estándar superando el promedio por ejemplo. Me dicen que hay maneras más precisas de determinar la normalidad de mis datos. . . interesante. Entiendo que la estadística para los físicos, químicos y matemáticos es algo diferente, pero para la gran mayoría de los biólogos, aplicar la estadística es como visitar al odontólogo, desagradable pero necesario.

“Si torturas los datos lo suficiente, confesarán” Ronald Coase

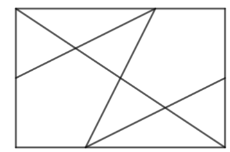
Evidentemente, es el abuso de la estadística y su manipulación ad absurdum lo que nos hacen dudar de ella. Podemos leer muchos casos de tales abusos y manipulaciones, incluso en situaciones en donde las consecuencias son muy grandes, como por ejemplo algunos estudios llevados a cabo por la industria farmacéutica. En 192 estudios de las estatinas (droga recetada para reducir niveles de colesterol), aquellos financiados por la industria produjeron resultados positivos para la droga 20 veces más frecuentemente que los estudios independientes (Bero et al. PLOS Medicine, **4**(6), 5 junio 2007). Ahora, hay una variedad de explicaciones de estos resultados sorprendentes, pero muchas tienen que ver con la aplicación sesgada de pruebas estadísticas. Lucía de Berk, una enfermera holandesa, fue condenada a cadena perpetua por el asesinato de siete pacientes, en base a cálculos hechos por el estadístico de la prosecución mostrando que había una posibilidad de uno entre 342 millones de que las muertes hubieran coincidido con su turno. Después de seis años presa, finalmente fue demostrado el error en los cálculos. Para mí, quedan las preguntas: 1) si el estadístico calculó mal a propósito, y 2) ¿donde estaba el experto en estadística de la defensa para refutar el cálculo? Obviamente, necesitamos más estadísticos en el mundo, que no estén en manos de los políticos, abogados e industria farmacéutica. Aplicar pruebas de estadística a nuestros resultados para demostrar su validez parece ser una necesidad para que sean aceptables para publicación. Pero, como la mayoría (creo) de biólogos, es algo que tengo que hacer, de la manera más superficial, y probablemente sin entender lo que estoy haciendo. Pero no tengo que preocuparme mucho, la mayoría de los evaluadores tampoco entienden la estadística, y si me limito a sembrar el texto con unas frases, “fue aumentado significativamente” o “y esta diferencia fue estadísticamente significativa”, sin pretender haber descubierto el agua tibia, nadie va a protestar. Oye, no soy el único; el descubrimiento de errores de estadística en 38 % de los artículos publicados en Nature en 2001 muestra que representa un problema en hasta las mejores familias (García-Berthou y Alcaraz, BMC Medical Research Methodology 4:13, 2004). Veo la necesidad de aplicar la prueba adecuada a mis resultados biológicos pero también, a veces, me parece que se asigna una importancia exagerada al análisis estadístico de los datos, es decir, se concentra más en la significancia de la diferencia entre los resultados de dos grupos experimentales que en la diferencia en sí. Significancia en este contexto solamente indica la probabilidad de que la diferencia existe en la realidad, no el tamaño de la diferencia. Por ejemplo:



Hay dos drogas disponibles para extender la vida de pacientes con una enfermedad mortal. La droga A extiende la vida en promedio tres meses y la B casi diez meses. Debido a la menor variabilidad de los resultados con la droga A, la mejoría en la esperanza de vida es mucho más significante que para la droga B. Cualquier prueba paramétrica lo dice, aplicando o no correcciones para las diferencias en las desviaciones estándares. Por lo tanto, alguien con entendimiento errado de la estadística tendría que escoger la droga A para su tratamiento. Pero viendo el gráfico, me inclino hacia la droga B. De los 7 datos, solamente uno no muestra mejoría, y la mayoría muestra esperanza de vida mucho mayor que con la droga A. La estadística no miente pero hay que escoger el momento para escucharla.

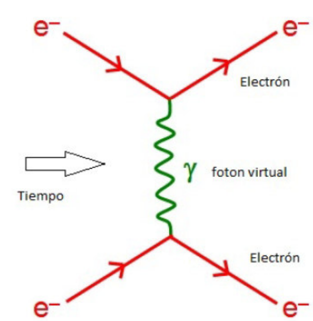
Peter Taylor
IVIC – Instituto de Medicina Experimental

Octubre 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**	. **Resolver** una ecuación $A(x) = B(x)$ significa hallar todos los valores de x para los cuales la igualdad es cierta.	. Una ecuación puede tener una, ninguna, varias o infinitas soluciones.	**1.** Resuelva la ecuación A $$2x - 1 = 5.$$	**2.** Resuelva la ecuación $x + 1 = x - 1$. A
5. Resuelva la ecuación B $$\|2x - 1\| = 5.$$	**6.** Resuelva la ecuación B $$\|x\| = x.$$	**7.** Resuelva la ecuación A $$\frac{2}{x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{6}.$$	**8.** A  ¿Cuántos triángulos ves?	**9.**  n. Luis Santaló
12. **Día de la Resistencia Indígena**	**13.** ¿Cuántos dígitos se necesitan para escribir todos los números del 1 al 100? A	**14.** Si se escriben todos los números del 1 al 100, ¿cuántos dígitos 7 hay que escribir? A	**15.** Si se escriben todos los números del 1 al 10000, ¿cuántos dígitos 7 hay que escribir? B	**16.** Halla todos los números de cuatro dígitos cuyos dígitos sumen 35. A
19. Resuelva la ecuación A $$2^x + x = 11.$$	**20.** Resuelva la ecuación B $$(x-2)^2(x-5)^3 = 0.$$	**21.** Resuelva la ecuación B $$\frac{1}{2x-3} = \frac{1-x}{x^2-4x+3}.$$	**22.** Resuelva la ecuación B $$4^x + 2x = 37.$$	**23.** Resuelva la ecuación B $$2^{2x-5} = \frac{1}{8}.$$
26. Resuelva la ecuación C $$\log_2(3x-1) = 3.$$	**27.** Resuelva la ecuación C $$x + \frac{6}{x} = 5.$$	**28.** Resuelva la ecuación C $$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2.$$	**29.** Resuelva la ecuación C $$4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0.$$	**30.** Resuelva la ecuación C $$\log_2(5 \cdot 2^{x-1} - 1) = 2x.$$

Probabilidad negativa, ¿apostarías?

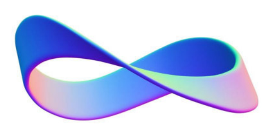
La mayoría de nosotros no somos personas de apostar a menudo. En mi caso esto podría deberse a que en este minúsculo grupo dentro de las ciencias naturales donde nos dedicamos a la física, las probabilidades suelen venir siempre de la mano con la "no tan bien comprendida" mecánica cuántica, la teoría de los átomos, moléculas y todo eso que es muy pequeño y por supuesto no muy útil al momento de poner una apuesta.
Fue en 1942 cuando Paul Dirac publicó en los *Proceedings* de la Royal Society, en Londres, su celebrada "*Interpretación física de la mecánica cuántica*" donde, por primera vez, al menos en el ámbito de la física, se introduce la nefasta pero maravillosa posibilidad de las probabilidades negativas. Para darle un poco de claridad a esto debo aclarar que la física cuántica es un arte de calcular probabilidades, en donde cada cantidad observable, medible en un laboratorio, proviene de una probabilidad calculada a partir de algunas hipótesis bien fundamentadas y la mejor de las intenciones.
¿Que encontró Dirac? En el camino que emprendió para extender la física cuántica ordinaria (física que involucra velocidades mucho menores que la velocidad de la luz) al ámbito relativista (velocidades cercanas a la de la luz), Dirac halla que los electrones relativistas pueden tener energías cinéticas negativas, y más aún, para partículas que poseen espín entero, como los fotones, estas energías negativas ¡ocurrían con una probabilidad negativa!
Como sabemos, la probabilidad de ocurrencia de un evento es no negativa, por lo tanto una teoría concebida con probabilidades negativas parece ser absurda y sin sentido. En esas mismas palabras lo resumió Richard Feynman en 1987, cuando con su estilo fresco y jocoso nos invita a reflexionar sobre cómo interpretar estas probabilidades absurdas en apariencia. Feynman propone un ejemplo simple, cotidiano e intuitivo para acercarnos a su interpretación: consideremos un vendedor de manzanas que tiene 5 manzanas; luego de un rato en el mercado el vendedor da 10 manzanas y unas horas más tarde recibe 8 manzanas, quedando con un total de 3 manzanas al final del día. Podemos resumir estas operaciones escribiendo primero $5 - 10 = -5$ y luego $-5 + 8 = 3$. Feynman explica que el resultado final es el correcto, es real y tangible, pero que en "nuestra forma" de resolver el problema, existe un estado intermedio donde obtuvimos como resultado que el vendedor tenia -5 manzanas, algo que como sabemos es imposible. El uso de números negativos provee de información que no es observable, pero es una etapa intermedia en un proceso que sí lo es.
Un modelo físico que ilustra en cierta medida esta etapa intermedia aparece en la electrodinámica cuántica. En la figura vemos como la interacción entre dos electrones es mediada por fotones virtuales, un fotón emitido por un electrón solo puede tener polarizaciones transversales a su movimiento, así por ejemplo si se mueve en la dirección $\hat{z}$, estará polarizado solo en las direcciones $\hat{x}$ y $\hat{y}$. Por otro lado, la probabilidad de emitir un fotón polarizado en una dirección $\hat{e}$ arbitraria viene dada por la expresión mecánico cuántica $-|\langle f|\vec{J}\cdot\hat{e}|i\rangle|^2/|\vec{e}|^2$, donde los vectores $\vec{J}$ y $\hat{e}$ tienen cuatro componentes, 3 espaciales $+1$ temporal (dimensión $3+1$, como decimos los físicos). Con esta fórmula para la probabilidad "corremos el riesgo" de obtener un valor negativo, cosa que podemos evitar si consideremos el panorama completo.
Además, en este caso, todo fotón libre emitido tiene una restricción relativista extra $\hat{e}\cdot\hat{e} = -1$, que nos dice que la propagación también ocurre en la dirección temporal de los vectores (fotones tipo tiempo t). Estas condiciones sólo aplican a fotones emitidos desde un estado inicial $|i\rangle$ y luego en un estado final $\langle f|$, como está expresado en la fórmula, pero no aplican a ningún fotón que pueda ser emitido entre esos dos estados, pues estos fotones no podemos observarlos y están libres de tener polarizaciones transversales, y sin ninguna restricción para tener probabilidades negativas. Veamos esto explícitamente: si un fotón t es emitido con una probabilidad $-\alpha$ ($|\alpha| > 0$) y otro fotón t es emitido de manera independiente con una probabilidad $-\beta$ ($|\beta| > 0$), la probabilidad de emitir ambos es positiva $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta > 0$.
Feynman se pregunta, "¿No deberíamos esperar observar la emisión de estos fotones, si su probabilidad conjunta de emisión es positiva?" La respuesta es que sí. Pero un fotón no se propaga únicamente en el tiempo, también lo hace en el espacio. Si suponemos que estos fotones se mueven en la dirección $\hat{z}$ (fotones tipo z) entonces tienen también una probabilidad α y β de ser emitidos en esta dirección, dejándonos con cuatro posibles emisiones; dos fotones t con probabilidad $+\alpha\beta$; el primer fotón t con el segundo z, con probabilidad $-\alpha\beta$; el segundo t con el primer z con $-\alpha\beta$ y dos fotones z con probabilidad $\alpha\beta$. Si sumamos estas probabilidades obtenemos que la probabilidad de emisión ¡es cero!, de manera que sólo ocurrirá emisión en las direcciones transversales a z y t, las direcciones $\hat{x}$ y $\hat{y}$ como es observado en la naturaleza. La información matemática sobre los fotones que intermedian la interacción entre electrones, aunque no es física desde el punto de vista de la observación, es muy valiosa para tener mayor entendimiento sobre los posibles procesos que pueden ocurrir, y esto es solo la punta del iceberg.



"*As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; as far as they are certain, they do not refer to reality*" Albert Einstein

Nelson Bolívar
Centro Atómico Bariloche
Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA)
Instituto Balseiro, Bariloche, Argentina

NOVIEMBRE 2021

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1. A Un reloj digital muestra las 03:57. ¿Dentro de cuánto tiempo volverá a mostrar los mismos dígitos, pero en otro orden?	**2.** A Una mosca tiene 6 patas, mientras que una araña tiene 8. Juntas, 4 moscas y 3 arañas tienen tantas patas como 10 pájaros y... ¿cuántos conejos?	**3.** A ¿Cuál es el menor número que se puede obtener intercambiando dosde los ocho dígitos de 51129152?	**4.** A ¿Cuál es el menor número **impar** que se puede obtener intercambiando dos de los ocho dígitos de 51129152?	**5.** A Una clase de 75 minutos finalizó a las 11:50 am. ¿A qué hora comenzó?
8. A En un mes hubo 5 sábados y 5 domingos, pero sólo 4 viernes y 4 lunes. ¿Cuántos miércoles habrá en el mes siguiente?	**9.** A Los números de 4 dígitos cuyos dígitos suman 5 se ordenan de menor a mayor. ¿Qué puesto ocupa el 2021?	**10.** B Dos números de 4 dígitos tienen los mismos dígitos pero en diferente orden. ¿Cuál es la máxima diferencia posible entre ellos?	**11.** B ¿Cuánto es la suma de los dígitos de $10^{2021} - 2021$?	**12.** A En un mes hubo 5 domingos, 5 lunes y 5 martes. ¿Qué día de la semana fue el 19 de ese mes?
15. B Un ferry puede transportar 10 carros pequeños o 6 camionetas en un viaje. Un día cruzó el río 5 veces, siempre lleno, y transportó 42 vehículos. ¿Cuántas camionetas transportó?	**16.** A Eva quería multiplicar un número por 301, pero se le olvidó el cero y lo multiplicó por 31, obteniendo como resultado 372. De no haberse equivocado, ¿qué resultado habría obtenido?	**17.** B  n. August Möbius	**18.** A Nos dan tres puntos que forman un triángulo. Queremos añadir un cuarto punto para formar un paralelogramo. ¿Cuántas posibilidades hay para el cuarto punto?	**19.** A Francisco seleccionó un número, lo dividió entre 5, al resultado le sumó 5 y a la suma la multiplicó por 5. Si obtuvo el número 55, ¿qué número seleccionó inicialmente?
22. B Si $2^{9^x} = 8^{3^y}$, ¿qué relación existe entre x e y?	**23.** B ¿Qué número ocupa la posición 2021 en la sucesión $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$?	**24.** A ¿Qué dígito hay que agregar a la derecha de 25762 para obtener un múltiplo de 12?	**25.** A ¿Cuál será el próximo año en que el 25 de noviembre sea jueves?	**26.** A Juan piensa 3 números. Si los suma de a pares obtiene 18, 25 y 29. ¿Cuáles son los números?
29. C Evalúe $\log_2 9 \cdot \log_3 32.$	**30.** C Evalúe $\dfrac{\log_2 81}{\log_2 3}.$	.	.  **Cinta de Möbius**	. **Niveles:** **A: para todos,** **B: media general,** **C: 4° y 5° años.**

La codificación de la información y los números estocásticos. Parte I.

> *"La formación es tarea de toda la vida más aún en esta época en la cual están pasando cosas maravillosas, el conocimiento se expande a velocidad vertiginosa y la tecnología también."*
> Enrique A. Planchart R. (1937-2021).

La información almacenada (procesada) en un computador es medida y codificada como una sucesión finita de interruptores, los cuales están representados por bits. El tamaño de los archivos y las tasas de transferencia son medidos en bits, en general, toda información en el lenguaje del usuario es convertida a bits para que el computador "la entienda". Por ejemplo, podríamos usar la siguiente correspondencia para codificar las letras A, V e I: $A = 00000001$, $V = 00000111$ y $I = 00000011$. Entonces en el computador la palabra VIA se convierte en la sucesión: 000001110000000110000001.

En el verano de 1965 varios grupos de investigadores, descubrieron de manera independiente una nueva estructura de codificación que recibió el nombre de *Codificación Estocástica*. Esta nueva estructura de codificación ha sido de gran interés en sí misma como una adición novedosa a la familia de técnicas para representar cantidades analógicas por probabilidades de eventos discretos, conocida como *Codificación Estocástica de la Información* (CEI, *Stochastic Computing* es el término usado en inglés), de manera que cálculos complejos puedan ser desarrollados por operaciones simples, bit-componente a bit-componente.

En CEI la analogía existente entre álgebras de probabilidades y álgebras de Boole es aprovechada para obtener unas unidades de procesamiento muy simples y una aritmética adecuada. El avance de la tecnología en lo referente a dispositivos programables, ha permitido retomar aquellas ideas de los años 60 del siglo pasado para llegar a implementaciones que, siendo totalmente digitales, permiten un procesamiento de la información más simple y eficiente que el procesamiento tradicional en determinados casos.

En esta nota, dividida en dos partes, presentaremos algunas representaciones de dispositivos electrónicos asociados a funciones lógicas, para ello necesitaremos introducir un objeto que contenga la información que almacena y transforma el dispositivo electrónico, tal objeto recibe el nombre de *número estocástico*.

Más precisamente, un *número estocástico* puede ser definido como un par (x, p_x), donde x es una sucesión binaria finita, i.e., $x \in \{0,1\}^N$, para algún $N \in \mathbb{N}$ y $p_x \in [0,1]$ es la probabilidad de observar un 1 en una posición arbitraria de x. Algunos autores suelen también llamar a la probabilidad p_x *valor* del número estocástico.

Así, para la palabra VIA codificada en el ejemplo anterior, los siguientes pares de sucesiones binarias y probabilidades asociadas representan algunos de sus números estocásticos:

$$
\begin{aligned}
x &= (0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1) &\longmapsto p_x = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},\\
y &= (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1) &\longmapsto p_y = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Note que aunque $x \neq y$, sus probabilidades asociadas coinciden. Por lo tanto, los pares (x, p_x) y (y, p_y) representan el mismo número estocástico. En otras palabras, si (x, p_x) es un número estocástico cuya sucesión binaria x tiene N componentes, de las cuales m son iguales a 1 y las restantes $N - m$ son iguales a 0, entonces $p_x = \frac{m}{N}$ y, por tanto, la representación de (x, p_x) no es única. CEI utiliza un sistema de números redundante en el cual existen $\binom{N}{m}$ posibles sucesiones binarias para el valor $p_x = \frac{m}{N}$. Además, una sucesión binaria x sólo puede tener probabilidades asociadas en el conjunto $\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, luego sólo un subconjunto pequeño de valores del número es tocástico $p_x \in [0,1]$ puede ser expresado usando CEI.

La construcción de operaciones aritméticas entre números estocásticos depende en parte de las operaciones artiméticas que pueden definirse en las álgebras de Boole $\{0,1\}$ ($\mathbb{Z}_2$) o en $\{0,1\}^N$ ($\mathbb{Z}_2^N$), donde $\mathbb{Z}_2$ y N denotan al conjunto de los enteros módulo 2 y la cantidad de componentes de la sucesión binaria, respectivamente. Más sobre estas operaciones en la Parte II, el mes próximo.

Yamilet Quintana
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Universidad Simón Bolívar, Venezuela

Soluciones y comentarios

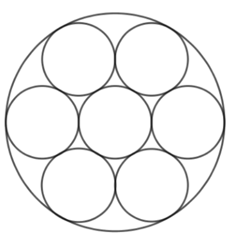
Enero

4. Isaac Newton nació el 4 de enero de 1643 en Woolsthorpe, Inglaterra, y murió el 31 de marzo de 1727 en Londres. Fue matemático, físico y teólogo. Es autor de los *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, donde describe la ley de la gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Rn matemáticas, Newton comparte con Gottfried Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de la matemática, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes.
Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos, y su obra como la culminación de la revolución científica.

5. Sean $n-1$, n y $n+1$ los tres números. Entonces $(n-1)n(n+1) = 280(n-1+n+n+2) = 280 \cdot 3n$, de donde $(n-1)(n+1) = 280 \cdot 3$, $n^2 - 1 = 840$ y $n = \sqrt{841} = 29$. Luego los números son 28, 29 y 30.

6. El número de cubitos necesarios para construir un cubo con n cubitos por lado es n^3. Los cubos menores que 300 son 1, 8, 27, 64, 125 y 216. Consruyendo un cubo de lado 6 y otro de lado 4 se utilizan $216 + 64 = 280$ cubitos y quedan 20 sin utilizar.

7. 2 cm, 4 cm y 5 cm.

8. Caben 7. 

11. El número debe ser múltiplo de 3 y de 5. Luego debe terminar en 5 o 0, pero 0 no puede ser pues el primer dígito sería 0 y el número no sería de 4 dígitos. Luego debe ser de la forma $5xx5$ y la suma de sus dígitos $5 + x + x + 5 = 10 + 2x$ debe ser múltiplo de 3, de donde x puede ser 1, 4 o 7 y la respuesta es 5115, 5445 y 5775.

12. Hay 9 capicúas de 1 dígito (del 1 al 9), 9 capicúas de 2 dígitos (11,22,. . . , 99), 10 capicúas de 3 dígitos que comienzan en 1 (101, 111, 121,. . . , 191), 10 capicúas de 3 dígitos que comienzan en 2,. . . , 10 capicúas de 3 dígitos que comienzan en 8. O sea que hasta el 898 van 98. En el lugar 99 va el 909 y en el lugar 100 el 919.

13. Es el 121. Ningún capicúa de 2 dígitos (11,22,. . . , 99) es cuadrado perfecto. Ni el 101 ni el 111. Pero $121 = 11^2$.

14. Examinemos los capicúas en orden decreciente comenzando por 999. $999 = 3 \cdot 333$, $989 = 23 \cdot 43$, $979 = 11 \cdot 89$, $969 = 3 \cdot 323$, $959 = 7 \cdot 137$, $949 = 13 \cdot 73$, $939 = 3 \cdot 313$, y llegamos a 929 que es primo.

15. $A - B = \frac{1}{9}(10^{14} - 1) - \frac{2}{9}(10^7 - 1) = \frac{1}{9}(10^{14} - 2 \cdot 10^7 + 1) = \frac{1}{9}(10^7 - 1)^2$, luego $\sqrt{A - B} = \frac{10^7 - 1}{3} = 3333333$.

18. $2021 = 43 \cdot 47$.

19. 2199.

20. Como $2020 \cdot 2022 = (2021 - 1)(2021 + 1) = 2021^2 - 1 < 2021^2$, el mayor es $\frac{2021}{2022}$. En general $\frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n}$ para todo $n \geq 1$.

21. Como $2021 = 9 \cdot 224 + 5$, ese número es 599. . . 99 (un 5 seguido de 224 nueves).

22. $N + 1 = 600\ldots00$ (un 6 seguido de 224 ceros). Luego $N + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 10^{224} = 2^{225} \cdot 3 \cdot 5^{224}$ y su mayor factor primo es 5.

25. Los dígitos de las unidades de 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9,. . . son 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2,. . . y vemos que el grupo 2, 4, 8, 6 se repite. De 1 a 2020 ese grupo se repite 505 veces y entonces 2^{2021} termina en 2.

26. No, porque todos los capicúas de 4 dígitos son múltiplos de 11.

27. El número debe ser múltiplo de 4 y de 9. Para que sea múltiplo de 4 debe serlo $overline3b$, de donde b puede ser 2 o 6. La suma de dígitos $a + 8 + 3 + b = a + 11 + b$ debe ser múltiplo de 9. Luego si $b = 2$ entonces $a = 5$ y si $b = 6$ entonces $a = 1$. La respuesta es 5832 y 1836.

28. $\frac{2021^2 - 1}{2022} = \frac{(2021-1)(2021+1)}{2022} = 2020$.

29. $\frac{21}{0{,}75} = 28$.

Febrero

1. 1, 2, 3, 4, 6, 12.

2. 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6.

3. No. En la definición de número primo exigimos que sea mayor que 1.

4. Solo el 0.

5. Todos los enteros son divisores de 0, ya que para cualquier entero n se cumple que $n \cdot 0 = 0$.

8. Sí, porque $0 = 0 \cdot 2$.

9. No, porque 0 es par.

10. $a \mid b$ significa que existe un entero r tal que $ar = b$. Y $b \mid c$ significa que existe un entero s tal que $bs = c$. Entonces $c = bs = (ar)s = a(rs)$ (por la propiedad asociativa), lo que muestra que $a \mid c$.

11. Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces existen enteros r y s tales que $ar = b$ y $as = c$. Entonces $b + c = ar + as = a(r + s)$, lo que significa que $a \mid b + c$. Análogamente $b - c = ar - as = a(r - s)$, lo que significa que $a \mid b - c$.

12. Si $a \mid b$ y $a \mid b + 3$ entonces $a \mid (b + 3) - 3$, es decir que $a \mid 3$ y a ´olo puede ser 1, 3, -1 o -3.

17. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

18. Sí, el 2.

19. $p + 35$ es un primo mayor que 2, luego es impar, luego p es par y la única posibilidad es $p = 2$.

22. Frank Plumpton Ramsey nació el 22 de febrero de 1903 en Cambridge, Reino Unido, y murió el 19 de enero de 1930 en Londres. Desarrolló varios trabajos sobre lógica, matemáticas, economía y filosofía. Uno de los teoremas probado por Ramsey muestra que, dentro de un sistema suficientemente grande, a pesar del desorden debe haber cierto orden. Ese resultado dió origen a una nueva rama de la Combinatoria que hoy en día se llama Teoría de Ramsey. También hizo contribuciones fundamentales en economía.

23. $n^2 - 25$ es primo pero $n^2 - 25 = (n + 5)(n - 5)$, luego $n - 5$ debe ser 1 y $n = 6$.

24. Como $p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$ es primo, debe ser $p - q = 1$ y por lo tanto $q = 2$ y $p = 3$.

25. 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97.

26. 83.

Marzo

1. 333.

2. 205.

3. Sí, el 0.

4. 44.

5. 21.

8. 5 años.

9. 17 años.

10. 12.

11. 24.

12. 7.

15. Los 4 dígitos pueden ser 4, 0, 0, 0 (un solo número), 3, 1, 0, 0 (6 números), 2, 2, 0, 0 (3 números) o 2, 1, 1, 0 (9 números). Total 19 números.

16. 16.

17. 11.

18. 95.

19. 74.

22. 26.

23. Emmy Noether nació el 23 de marzp de 1882 en Erlangen (Alemania) y murió el 14 de abril de 1935 en los Estados Unidos de América. Hija del matemático Max Noether, Emmy llegó a ser una notable matemática, especialista en la teoría de invariantes y conocida por sus contribuciones fundamentales al álgebra abstracta y a la física teórica. Considerada por Hilbert, Einstein y otros personajes como la mujer más importante en la historia de la matemática, revolucionó la teoría de anillos, la teoría de cuerpos y la de K-álgebras. Los *anillos noetherianos* son así denominados en su honor. En física, el *teorema de Noether* explica la conexión entre la simetría y las leyes de conservación.

24. 54.

25. No hay ninguno. Los números de dos dígitos que suman 11 y con el dígito de las decenas mayor que el de las unidades son 92, 83, 74 y 65, y las diferencias entre ambos dígitos son 7, 5, 3 y 1, nunca 4.

26. Los números de dos dígitos con el dígito de las unidades doble que el de las decenas son 12, 24, 36 y 48. El que supera en 36 a la suma de sus dígitos es el 48.

29. 12 (los que están en el medio de cada una de las 12 aristas).

30. 24 (los 4 que están en el centro de cada una de las 6 caras).

31. René Descartes nació el 31/03/1596 en La Haye, Francia, y murió el 11/02/1650 en Estocolmo, Suecia. Fue filósofo, matemático y físico. La influencia de René Descartes en las ciencias y en la matemática es enorme. El sistema de coordenadas cartesianas se llama así en su honor, y se le considera como el padre de la geometría analítica, el puente entre el álgebra y la geometría.

Abril

5. Sí, 2 y 3 (son los únicos primos que difieren en 1).

6. Sí, por ejemplo $2 + 3 = 5$, $2 + 5 = 7$, $2 + 11 = 13$. Uno de los sumandos debe ser necesariamente 2.

7. El 11. En efecto, $\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$.

8. El menor entero positivo de tres dígitos es 100, que es compuesto. El siguiente es 101 que no es divisible entre 2, 3, 5 ni 7. Como $11^2 > 101$, ya podemos afirmar que 101 es primo.

9. El mayor es 997. 999 no es primo pues es divisible entre 3, 998 tampoco potque es divisible entre 2. Pero 997 es primo. Para verlo hay que verificar que no es divisible ente 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ni 31 (no hace falta seguir pues $37^2 = 1369 > 1000$).

12. El mayor es 900 y el menor 108. Su suma es 1008.

13. El mayor es 960 y el menor 159. Su suma es 1119.

14. El mayor es 9970 y el menor 1699. Su suma es 11669.

15. Leonhard Euler nació en Basilea, Suiza, el 15 de abril de 1707 y murió en San Petersburgo, Rusia, el 18 de septiembre de 1783. Fue el matemático más importante del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos. Es muy conocido por la fórmula $e^{\pi i} + 1 = 0$, que relaciona 5 de los números más importantes de la matemática, por sus desarrollos en serie y productos infinitos y por incontables resultados en todas las ramas de esta ciencia, además de haber originado nuevas ramas como la Topología y la Teoría de Grafos. Entre los participantes en olimpiadas matemáticas son populares el Teorema de Euler $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ para a coprimo con m, la *recta de Euler* que contiene el baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo, la fórmula $OI^2 = R(R - 2r)$ que expresa la distancia del circuncentro O al incentro I de un triángulo con los radios r y R de sus circunferencias inscrita y circunscrita, la igualdad $V - A + C = 2$ para poliedros convexos, la condición para que un grafo admita un recorrido que pase una y sólo una vez por cada arista, etc.

16. El mayor es 982 y el menor 289. Su suma es 1271.

19. Es $99^2 = 9801$, porque $100^2 = 10000$ ya tiene 5 dígitos.

20. Como $70^2 = 4900$ y $71^2 = 5041$, el menor es 71.

21. Si u es el dígito de las unidades de n, entonces el dígito de las unidades de n^2 es el mismo que el de u^2. cuando u var+ia de 0 a 9, u^2 toma los valores 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Luego n^2 solo puede terminar en 0, 1, 4, 5, 6 o 9.

22. No, porque un cuadrado no puede terminar en 2, 3, 7 ni 8.

23. Un cuadrado no puede terminar en 2, 3 ni 7, luego las únicas posibilidades son 2371, 2731, 3271, 3721, 7231 y 7321. De estos, solo $3721 = 61^2$ es un cuadrado.

26. El lado mide $24/4 = 6$ cm y el área es $6 \times 6 = 36$ cm^2.

27. El lado mide 7 cm y el perímetro es $7 \times 4 = 28$ cm.

28. El lado del primer cuadrado mide 6 cm, luego el lado del segundo cuadrado mide 12 cm y su área es 144 cm^2. En general, si el lado de un cuadrado se duplica, el área se cuadruplica.

29. El área del cuadrado es 36 cm^2. La altura del triángulo, multiplicada por la base (8 cm) y dividida entre 2 debe dar 36, luego la altura mide 9 cm.

30. El área del rectángulo es $9 \times 4 = 36$ cm^2, luego el lado del cuadrado es 6 cm y su perímetro es 24 cm.

Mayo

4. $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

5. $9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 = 243$.

6. q no puede ser impar, pues en ese xaso $p = 7q + 3$ sería un par mayor que 2 y no sería primo. Luego $q = 2$ y $p = 17$.

7. 3999.

10. $(1 + 2021)2021/2 = 2043231$.

11. 10.

12. Maryam Mirzajani nació en Teherán, Irán, el 12 de mayo de 1977 y falleció en Stanford, California, Estados Unidos de América el 14 de julio de 2017. Obtuvo medallas de oro en la IMO en 1994 y en 1995 con prueba perfecta. Sus originales investigaciones sobre geometría hiperbólica, análisis complejo, superficies de Riemann, topología y sistemas dinámicos conectan varias disciplinas matemáticas e influyen en todas ellas. En 2014 fue galardonada con la Medalla Fields, siendo la primera mujer en recibir este premio que muchos consideran el equivalente al premio Nobel en el campo de las matemáticas.

13. 21 (todos los enteros desde el 4 hasta el 24).

14. 3, 5 y 6.

17. 7 años. Las condiciones se pueden expresar como $B = A + 8$, $B + 1 = 2(A + 1)$. Luego $A + 8 + 1 = 2A + 2$, de donde $A = 7$ y $B = 15$.

18. Las condiciones se pueden expresar como $B = 2A$ y $B + (2B - A) = 45$. Resolviendo resulta que Ana tiene 9 años y Bruno 18.

19. Sea n el número de caramelos y supongamos que cuando Berta los agrupa de 5 en 5 obtiene k grupos. Entonces $n = 5k$, y por otra parte $n = 4(k + 3)$. Se sigue que $5k = 4(k + 3)$, de donde $k = 12$ y $n = 60$.

20. $5 \times 5 \times 8 = 200$.

21. Si $\overline{abc}$ es uno de esos números, debe ser $c > a > 0$. El par (a, c) se puede escoger de $9 \cdot 8/2 = 36$ maneras, y el dígito b de 10 maneras. Total 360 números.

24.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{49\cdot 50}\\
&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\\
&=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}.
\end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{49\cdot 51}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{51}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{50}{51}=\frac{25}{51}.
\end{aligned}$$

26. Los dígitos de las unidades de 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5,... son una sucesión periódica: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1,... Observamos que en todas las posiciones que dejan resto 1 al dividir entre 4 (1, 5, 9, etc.) va un 3, luego en la posición 2021 va un 3. La respuesta es 3.

27. Del 1 al 99 el 3 aparece como dígito de las unidades en 10 números (3, 13,..., 93) y como dígito de las decenas en otros 10 (30,31,..., 39). Eso da 20 dígitos 3, y hay otros 20 del 100 al 199 y otros 20 del 200 al 299. Del 300 al 333 todos (34) tienen 3 en las centenas, 4 tienen 3 en las decenas (330, 331, 332, 333) y 4 tienen 3 en las unidades (303, 313, 323, 333). La respuesta es $20+20+20+34+4+4=102$.

28. $\log_4 \sqrt[5]{64}=\frac{1}{5}\log_4 4^3=\frac{3}{5}$.

31. $\log_8 0,25=\log_8\frac{1}{4}=-\log_8 4=-\frac{2}{3}$.

Junio

1. a es divisor común de a y ka, y es el más grande ya que si $d>a$ entonces d no divide a a, Luego $\operatorname{mcd}(ka,a)=a$.

2. Si $d|a$ y $d|b$ entonces $d|a-b$ y d es divisor común de b y $a-b$. Recíprocamente si $d|b$ y $d|a-b$ entonces $d|b+(a-b)$, es decir que $d|a$ y d es divisor común de a y b. Entonces los divisores comunes de a y b son los mismos que los de b y $a-b$ y por lo tanto $\operatorname{mcd}(a,b)=\operatorname{mcd}(b,a-b)$.

3. Por lo anterior $\operatorname{mcd}(1234567893,1234567891)=\operatorname{mcd}(1234567891,2)=1$.

4. Si $d|a$ y $d|b$ entonces $d|a-qb$ y d es divisor común de b y r. Recíprocamente si $d|b$ y $d|r$ entonces $d|qb+r$, es decir que $d|a$ y d es divisor común de a y b. Entonces los divisores comunes de a y b son los mismos que los de b y r y por lo tanto $\operatorname{mcd}(a,b)=\operatorname{mcd}(b,r)$.

7. Como $600000039=2\times 300000015+9$, por lo anterior se tiene $\operatorname{mcd}(600000039,300000015)$ $\operatorname{mcd}(300000015,9)$. Por el criterio de la suma de los dígitos, 300000015 es divisible entre 3 pero no entre 9, luego $\operatorname{mcd}(300000015,9)=3$.

8. Como $3\cdot 10^100+63=30(10^99+2)+3$, se tiene $\operatorname{mcd}(3\cdot 10^100+63,10^99+2)=\operatorname{mcd}(10^99+2,3)=3$, donde la última igualdad se debe a que 10^99+2 es divisible entre 3, ya que su primer dígito es 1, el último es 2 y todos los demás son 0.

9. Si $a>b$ entonces $2^a-1=2^{a-b}(2^b-1)+2^{a-b}-1$ y por tanto $\operatorname{mcd}(2^a-1,2^b-1)=\operatorname{mcd}(2^{a-b}-1,2^b-1)$. Aplicando esto se tiene $\operatorname{mcd}(2^{180}-1,2^{48}-1)=\operatorname{mcd}(2^{132}-1,2^{48}-1)=\operatorname{mcd}(2^{84}-1,2^{48}-1)=\operatorname{mcd}(2^{36}-1,2^{48}-1)=\operatorname{mcd}(2^{12}-1,2^{36}-1)=\operatorname{mcd}(2^{12}-1,2^{24}-1)=\operatorname{mcd}(2^{12}-1,2^{12}-1)=2^{12}-1$.

10. Si $a=qb+r$ entonces $\operatorname{mcd}(2^a-1,2^b-1)=\operatorname{mcd}(2^{a-b}-1,2^b-1)=\operatorname{mcd}(2^{a-2b}-1,2^b-1)=\cdots=\operatorname{mcd}(2^{a-qb}-1,2^b-1)=\operatorname{mcd}(2^r-1,2^b-1)$. El ejercicio se termina repitiendo este proceso y recordando el algoritmo de Euclides para hallar el mcd,

11. Si $2^x=7$ entonces $(2^x)^2=7^2=49$ y $(2^{2x})^y=49^y=64$, de donde $2^{2xy}=64=2^6$ y $2xy=6$. Por lo tanto $xy=3$.

14. Si $8^x=25$ entonces $8^{x/2}=5$ y $8^{3x/2}=5^3=125$. Por lo tanto $8^{3xy/2}=125^y=4\sqrt{2}$, de donde $2^{9xy/2}=2^{5/2}$ y $9xy/2=5/2$. Finalmente $xy=5/9$.

15. No, porque los cuadrados perfectos solo pueden terminar en 0, 1, 4, 5, 6 o 9.

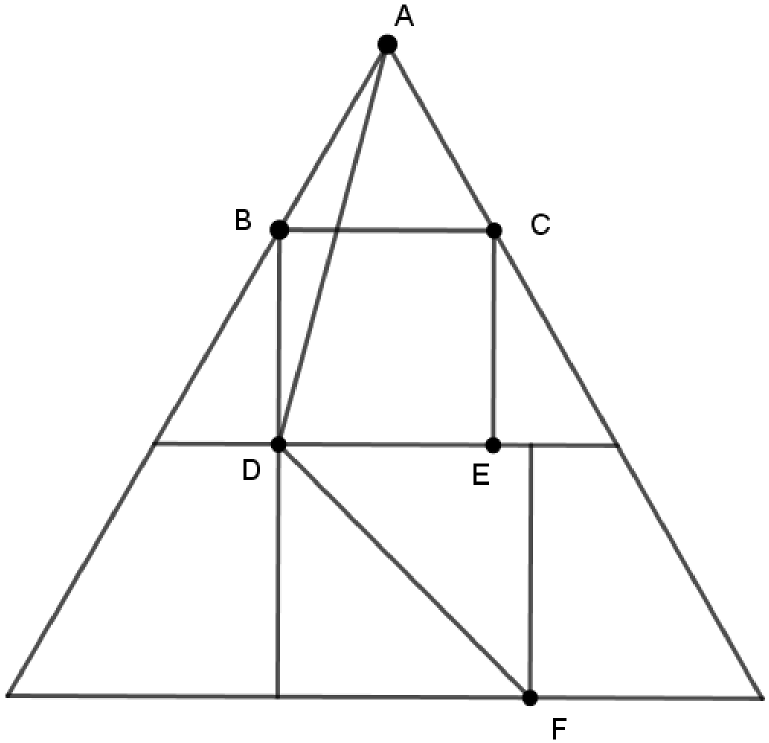
16. No. Si fuese un cuadrado perfecto n^2, el 1 debería ser el dígito de las unidades y el dígito de las decenas sería 3 o 7. Pero si $n^2=10m+1$ entonces n es impar y $n^2-1=(n+1)(n-1)$ es múltiplo de 4. Luego $10m$ es múltiplo de 4 y m es par, o sea que el dígito de las decenas debería ser par, contradicción.

17. Los puntos de intersección con el polígono dividen a la recta en dos semirrectas (exteriores al polígono) y varios segmentos. El segmento adyacente a una de las semirrectas es interior al polígono, el que le sigue es exterior, el que sigue a éste es interior, y así sucesivamente. Como el último segmento (adyacente a la otra semirrecta) es interior, el número de segmentos es impar, y el número de puntos de intersección es par. Si cada punto de intersección fuese interior a un lado del polígono entonces habría 11 puntos de intersección. Como hay un número par, algúno de ellos debe ser un vértice del polígono.

18. Los cubitos que tienen exactamente 2 caras pintadas de azul son los que se hallan en alguna de las aristas del cubo, pero no son vértices. O sea que hay 3 en cada arista, y como el cubo tiene 12 aristas, en total hay 36 de esos cubitos.

22. El área a calcular es $\pi R^2/2$, donde R es el radio de la semicircunferencia. Luego el lado del triángulo equilátero circunscripto al círculo amarillo es $2R$, su altura es $R\sqrt{3}$ y el radio del círculo amarillo es $R\sqrt{3}/3$. Pero el área de ese círculo es 2, luego $\pi(R\sqrt{3}/3)^2=2$, de donde $\pi R^2/3=2$ y $\pi R^2/2=3$. La respuesta es 3.

25. $\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD=60^\circ+90^\circ=150^\circ$. Pero como $AB=BC=BD$, el triángulo ABD es isósceles y $\angle BDA=\angle BAD=(180^\circ-\angle ABD)/2=30^\circ/2=15^\circ$. Luego $\angle EDA=90^\circ-15^\circ=75^\circ$ y $\angle FDA=\angle FDE+\angle EDA=45^\circ+75^\circ=120^\circ$.



28. El primer dígito se puede escoger de 5 maneras y el segundo también. Eso da 25 combinaciones, de las cuales hay 5 que suman 9 (18, 36, 54, 72 y 90). Esas 5 se pueden completar con 0 o con 9 para tener un múltiplo de 9, mientras que las otras 20 solo se pueden completar de una manera. En total hay $5 \times 2 + 20 = 30$ números que cumplen las condiciones.

29. ¿Qué resto se obtiene si 2^{2021} se divide entre 7?
Las potencias de 2 (2, 4, 8, 16, 32, 64,...) divididas entre 7 dan restos 2, 4, 1, 2, 4, 1,... es decir una sucesión periódica de período 3. Como 2021 es de la forma $3k+2$, 2^{2021} entre 7 deja resto 4. Otra forma de verlo esÑ como $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$, entonces $2^{2021} = 2^{3\cdot 673+2} = 8^{673} \cdot 2^2 \equiv 1^{673} \cdot 4 = 4 \pmod 7$.

30. Si el lado mayor mide a y el menor b, entonces $a + 2b = 20$ y $2a + b = 22$, de donde $a = 8$ cm, $b = 6$ cm y el perímetro mide 28 cm.

Julio

1. Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1 de julio de 1646, Hannover, 14 de noviembre de 1716), fue un matemático, filósofo, lógico, teólogo y político alemán. Fue uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII y se le considera el último genio universal, esto es, la última persona que pudo formarse suficientemente en todos los campos del conocimiento. Realizó profundas e importantes contribuciones en las áreas de epistemología, lógica, matemática, física, geología, jurisprudencia e historia, entre otras. En matemáticas esarrolló el cálculo infinitesimal independientemente del trabajo de Newton y su notación para derivadas e integrales se emplea hasta hoy día. También inventó el sistema binario, fundamento de las computadoras actuales.

2. Si Ana dice la verdad entonces Bea miente, por lo cual Cleo dice la verdad y Dora miente. Si en cambio Ana miente, entonces Bea dice la verdad, Cleo miente y Dora dice la verdad. En cualquier caso hay dos que mienten (y dos que dicen la verdad).

6. La escalera tiene $27 \times 2 = 54$ escalones, luego el gigante da $54/9 = 6$ pasos.

7. 100 deja resto 2 al dividirlo entre 7, luego si hoy es miércoles dentro de 100 días será viernes.

8. $28 + 40 - 22 = 46$.

9. $(180 - 104)/2 = 38$ grados cada uno.

12. $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} = \frac{26}{12}$ es mayor que $\frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$.

13. El segundo, pues elevado al cuadrado es $\frac{256}{25} > \frac{250}{25} = 10$.

14. $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10} > 8^{10} = (2^3)^{10} = 2^{30}$.

15. El primero, pues elevado al cuadrado es $6 + 4\sqrt{2} > 5 + 4\sqrt{2}$.

16. Son iguales.

19. $15 \cdot 80/100 = 12$.

20. Ambos son iguales a 8.

21. Hay $30 - 12 = 18$ varones, y su porcentaje es $18 \cdot 100/30 = 60\,\%$.

22. El descuento es $40 \cdot 15/100 = 6$ luego hay que pagar $40 - 6 = 34$ \$.

23. El recargo es $20 \cdot 5/100 = 1$ luego hay que pagar 21 \$.

26. Las 24 niñas son el 60 % de la clase, luego el 40 % son 2/3 de 24 o sea 16.

27. El precio original es mayor, pues el descuento del 30 % se aplica a un monto mayor que el original y por tanto se descuenta más de lo que se aumenta. Por ejemplo si el precio original es 100, el precio aumentado es 120 y luego de descontar el 20 % queda en 96.

28. Sea A el número total de alumnos y sean N y V las sumas de puntos obtenidos por las niñas y por los varones, respectivamente. Entonces hay $0,6A$ niñas y su promedio es $N/(0,6A) = 17$. Hay $0,4A$ varones y su promedio es $V/(0,4A) = 14$. Por lo tanto $N = 17(0,6A) = 10,2A$ y $V = 14(0,4A) = 5,6A$. El promedio general es $(N+V)/A = 10,2 + 5,6 = 15,8$.

29. Sean n y v la cantidad de niñas y de varones en la clase, respectivamente, y sean N y V como en el problema anterior. Entonces $N/n = 17$, $V/v = 14$ y $(N+V)/(n+v) = 15,36$, de donde $N = 17n$, $V = 14v$, $N + V = 15,36(n+v)$ y por tanto

$17n + 14v = 15,36(n + v)$, $17(n + v) - 3v = 15,36(n + v)$, $3v = 1,64(n + v)$ y el porcentaje de varones es $100v(n + v) = 164/3 = 54,66...\,\%$.

30. Como julio tiene 31 días, el día 1 de ese mes no puede ser lunes ni martes ni miércoles, porque en esos casos habría 5 lunes en el mes. Tampoco puede ser viernes ni sábado ni domingo, pues en esos casos habría 5 viernes. Luego el 1 es jueves, igual que el 8 y el 15, y el 18 es domingo.

Agosto

2. $2021 - 43 \times 47 = 0$.

3. $2^{10} - 3^6 = 1024 - 729 = 295$.

4. $\frac{594}{1386} = \frac{297}{693} = \frac{33}{77} = \frac{3}{7}$.

5. $\sqrt[3]{8}^{\sqrt[4]{81}} = 2^3 = 8$.

6. $\log_2 \sqrt[3]{32} = \frac{1}{3}\log_2 32 = \frac{5}{3}$.

9. 6, 12, 18 y 24.

10. Si las raíces son p y q entonces $p + q = 20$ y $k = pq$. Los pares de primos que suman 20 son (3, 17) y (7, 13), que dan para k los valores 51 y 91.

11. En 1 hora y 12 minutos.

12. Un tetraedro regular.

13. Un prisma recto de base triangular.

16. El triángulo es isósceles, luego el ángulo pedido mide $180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

17. Pierre de Fermat nació en Beaumont-de-Lomagne, Francia, el 17 de agosto de 1601 y murió el 12 de enero de 1665. Fermat fue junto con René Descartes y Johannes Kepler uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. Fue cofundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal, descubrió independientemente de Descartes el principio de la geometría analítica y anticipó el cálculo diferencial. Sin embargo es más conocido por su trabajo en teoría de números y en particular por el conocido como *último teorema de Fermat*, el cual afirma que para $n > 2$ la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones en enteros no nulos. Esto ocupó a los matemáticos durante aproximadamente 350 años, hasta que fue demostrado en 1995 por Andrew Wiles. Los estudiantes ol+impicos utilizan mucho el llamado *teorema pequeño de Fermat*, a saber que si p es primo y a un entero no divisible entre p entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

18. Exactamente la mitad.

19. La medeida del ángulo no marcado es $180° - 32° - 74° = 74°$, luego el triángulo es isósceles y la medida pedida es 3 cm.

20. Si en el colegio hay n alumnos y en primer año hay p, entonces $0,25p = 0,10n$ de donde $100p/n = 10/0,25 = 40$. El 40 % de los alumnos del colegio están en primer año.

23. $256^{\frac{3}{8}} = 2^3 = 8$.

24. $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$.

25. $\left(\frac{1}{3125}\right)^{-\frac{2}{5}} = 3125^{\frac{2}{5}} = (\sqrt[5]{3125})^2 = 5^2 = 5$.

26. $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{49}{81}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - \frac{7}{9} = \frac{16}{9} - \frac{7}{9} = 1$.

27. $108°$.

30. $150°$.

31. $31 + 62 + \cdots + 31 \cdot 29 = 31 \cdot 30 \cdot 29/2 = 13485$.

Septiembre

1. $1 - (2 - (3 - (4 - (5 - 6)))) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3$.

2. $9(8-7(6-5(4-3(2-1)))) = 9(8-7(6-5(4-3))) = 9(8-7(6-5)) = 9(8-7) = 9$.

3. $2((3 + 4(8 - 9)) - (1 - 5(4 - 7))) = 2((3 - 4) - (1 + 15)) = 2(-1 - 16) = -34$.

6. 20.

7. $20 + 15 - 3 = 32$.

9. Compuesto pues $2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1)$.

10. Compuesto pues $2^{51} + 1 = (2^{17} + 1)(2^{34} - 2^{17} + 1)$.

13. $(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$
$= a^n + a^{n-1} + \cdots + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \cdots - a - 1 = a^n - 1$.

14. $(a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1)$
$= a^n - a^{n-1} + \cdots + a + a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1 = a^n + 1$.

15. Si n fuese compuesto, $n = rs$, pongamos $a = 2^r$. Entonces $2^n - 1 = a^s - 1 = (a - 1)(a^{s-1} + a^{s-2} + \cdots + a + 1)$ sería compuesto.

16. Si n es un entero positivo y $2^n + 1$ es primo, pruebe que n es Si n no fuese una potencia de 2 entonces n tiene un divisor impar $m > 1$ y $n = mr$. Pongamos $a = 2^r$. Entonces $2^n + 1 = a^m + 1 = (a + 1)(a^{m-1} - a^{m-2} + \cdots - a + 1)$ sería compuesto.

20. 9752.

21. 1345.

22. $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$.

23. $\binom{10}{4} = 210$.

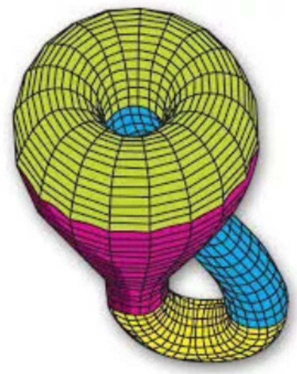
24. $\binom{9}{4} = 126$.

27. $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 = 285$.

28. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 8 \cdot 8 = 240$.

29. 165.

30. 219.



www.acmven.org

Diseño, problemas y soluciones: José H. Nieto S.

Autores de los artículos:

Carlos Di Prisco	Carmela Acevedo	José Rafael León
Douglas Jiménez	Ignacio Iribarren	Héctor Chang Lara
José Nieto	Henry Martínez	Peter Taylor
Nelson Bolívar	Yamilet Quintana	